

# ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

45. BAND

1960

VIERTES HEFT

## Inhaltsverzeichnis

Seite

J. FISCHER: Dreiersysteme, Vierersysteme, Fünfersysteme und Größenlehre . . . . .	225
S. NAHRGANG: Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler. Mit 19 Textabbildungen . . . . .	233
H. BUCHHOLZ: Die $H_{0n}$ -Welle im kreisförmigen Hohlleiter mit äquidistant und coaxial angeordneten bandförmigen Ringen vollkommener Leitfähigkeit. Mit 3 Textabbildungen . . . . .	249
W. BÖNING: Analytische Darstellung der Kennlinien nichtlinearer Zweipole. Mit 14 Textabbildungen . . . . .	265
W. HERMSTEIN: Die Entwicklung der positiven Vorentladungen in Luft zum Durchschlag. Mit 6 Textabbildungen . . . . .	279

## Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik

Von Dr.-Ing. habil. HEINZ SCHÖNFELD †,

o. Professor für Grundgebiete der Elektrotechnik und Regelungstechnik an der Technischen Hochschule  
Karlsruhe

Dritte Auflage besorgt von Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER,

o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Mit 298 Abbildungen. XI, 319 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 27,—

### INHALTSÜBERSICHT

Vorbetrachtung über physikalische Größen und Naturgesetze · Elektrische Erscheinungen in Leitern: Linienhafte Leiter. Räumliche Leiter · Elektrische Erscheinungen in Nichtleitern · Elektromagnetische Erscheinungen: Die grundlegenden magnetischen Erscheinungen. Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Größen. Energien und Kräfte im magnetischen Feld · Rückblick über die drei Erscheinungsgebiete an Hand der Wechselströme · Anhang · Literatur- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



Das

**Archiv für Elektrotechnik**

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zwanglos in einzeln berechneten Heften.

**Nachdruck:** Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für die Zeitschrift „Archiv für Elektrotechnik“ erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Archiv für Elektrotechnik“ erscheinende Arbeiten dürfen vorher nicht an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

**Fotokopien:** Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. (Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

**SPRINGER-VERLAG**

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberg

Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.

Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901

**The numerical treatment of differential equations**

By Dr. LOTHAR COLLATZ, o. Professor in the University of Hamburg

Third edition translated from a supplemented version of the second German edition by P. G. WILLIAMS, B. SC., Mathematics Division, National Physical Laboratory, Teddington/England

**(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**

**in Einzeldarstellungen mit bes. Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 60)**

Mit 118 Diagrammen und 1 Porträt. XV, 568 Seiten Gr.-8<sup>o</sup>. 1960. In englischer Sprache.

DM 93,60; Ganzleinen DM 98,—

**CONTENTS**

Mathematical preliminaries and some general principles · Initial-value problems in ordinary differential equations · Boundary-value problems in ordinary differential equations · Initial- and initial-boundary-value problems in partial differential equations · Boundary-value problems in partial differential equations · Integral and functional equations · Appendix · Author index · Subject index.

**SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**



## Dreiersysteme, Vierersysteme, Fünfersysteme und Größenlehre

Von

J. FISCHER, Karlsruhe

(Eingegangen am 30. März 1960)

**Inhaltsübersicht:** 1. Willkürliche oder bestimmbare Anzahl der Grundgrößen — 2. Mechanische Größen der Elektrizitätslehre in der Literatur — 3. Experimentelle Definitionen von Einheiten — 4. Korrespondenzen (Entsprechungen) oder Gleichungen? — Zusammenfassung.

### 1. Willkürliche oder bestimmbare Anzahl der Grundgrößen

Man definiert die Größen der Elektrizitätslehre dadurch, daß man sie ableitet aus Grundgrößen: diese sind Größen, die nicht mehr weiter ableitbar und von einander unabhängig sind. Die Definitionen der abgeleiteten Größen werden daher bestimmt durch die Anzahl der Grundgrößen. Es ist eine verbreitete Meinung (man findet sie auch in zusammenfassenden Darstellungen und in Lehrbüchern), daß man über die Anzahl der voneinander unabhängigen Größen nichts Bestimmtes sagen könne, sie sei vielmehr frei wählbar. Aus jeder Wahl folgt dann ein System von elektrischen und magnetischen Größen, aus jeder anderen Wahl ein anderes. Für ein und dieselbe physikalische Erscheinung, etwa für den elektrischen Strom, gibt es zum Beispiel in einem System mit drei Grundgrößen eine Größe: Stromstärke  $I^{\text{III}}$ , in einem System mit vier Grundgrößen eine Größe: Stromstärke  $I^{\text{IV}}$ . Diese beiden Größen sind definitionsgemäß Größen verschiedener Art, es können aus ihnen nicht physikalisch sinnvoll Summe oder Differenz gebildet werden; es ist falsch, zu sagen, die eine sei ein zahlenmäßiges Vielfaches der anderen, vielmehr ist ihr Quotient wieder eine physikalische Größe, nicht etwa eine unbenannte Zahl. Das einzig Gemeinsame ist der Umstand, daß beide Größen Attribute (Beschreibungen) derselben physikalischen Erscheinung „elektrischer Strom“ sind, und nur dieser Umstand (zusammen mit dem beschränkten Vorrat an Wörtern und Formelzeichen) rechtfertigt es, daß für die zwei ganz verschiedenartigen Größen dennoch dasselbe Wort „Stromstärke“ und dasselbe Zeichen  $I$  benützt wird.

Bei der nach dieser Auffassung freien Wahl der Anzahl der Grundgrößen hat man sich insbesondere nach Einheitensystemen gerichtet. Man hat bekanntlich lange Zeit in der Elektrizitätslehre die Einheiten dargestellt als Potenzprodukte der drei Grundeinheiten der Mechanik: Zentimeter, Gramm, Sekunde. Zwar stammt diese Darstellung aus einer Zeit, von der man mit großer Sicherheit sagen kann, daß die Anwendung von Größengleichungen kaum, dagegen die Anwendung von Zahlenwertgleichungen ganz allgemein, fast ausschließlich gebräuchlich war. Um jedoch diese Darstellung, die von den Klassikern der Physik benutzt wurde, mit den Begriffsbildungen der heutigen Größenlehre gewissermaßen zu rechtfertigen, hat man Systeme von elektrischen und magnetischen Größen gebildet, die aus den drei Grundgrößen der Mechanik: Länge, Masse, Zeit abgeleitet werden (mechanische Auffassung der Größen der Elektrizitätslehre). — Die gegenwärtig gebräuchlichen Einheitensysteme haben vier unabhängige Grundeinheiten. Sie passen zu Größen, die aus vier Grundgrößen abgeleitet werden (elektrodynamische Auffassung von den Größen der Elektrizitätslehre), aber diese Größen sind definitionsgemäß verschieden von den Größen, die aus drei Grundgrößen abgeleitet werden. Wiederum neue und andersartige Größen werden definiert, wenn man die Forderung erhebt, daß die Anzahl der unabhängigen, nicht mehr weiter ableitbaren Größen fünf oder sechs seien müsse. Es wird dann von „Dreiersystemen“, „Vierersystemen“,



„Fünfersystemen“ usw. gesprochen, je nach vorweg gewählter Anzahl der Grundgrößen. — Man erschafft mit dieser Auffassung eine fast unbegrenzte Vielfalt verschiedener Größensysteme.

Man kann, aber man muß nicht so denken. Es gibt auch eine ganz andere Auffassung. Diese geht von dem Grundsatz aus, daß zuerst die Größengleichungen aufgestellt werden und danach erst die Einheiten aus den vorgegebenen Größengleichungen hergeleitet werden. Die Anzahl der Grundgrößen ist nicht zur Wahl gestellt, vielmehr ist eine Anzahl, die notwendig und hinreichend ist, durch Anwendung bestimmter Grundsätze bestimmbar.

Es ist klar, daß es sich dabei in erster Linie darum handeln muß, die Mindestanzahl, die notwendig ist, aufzufinden (man denke etwa an eine Beschreibung der Mechanik, der die physikalische Größe: Masse fehlt und die nur die Größen: Länge und Zeit kennt). Für weniger einschneidend, als die Unterschreitung der notwendigen Mindestanzahl wird man die Überschreitung halten, die etwa durch Einführen zusätzlicher Forderungen entsteht (man denke etwa an eine Wärmelehre einschließlich Mechanik, in welcher die Wärmemenge und die Arbeit als von einander unabhängige Größen erklärt werden).

Eine vorangegangene Arbeit<sup>1</sup> hat sich mit den Grundsätzen befaßt, deren Anwendung auf die notwendige und hinreichende Anzahl unabhängiger Größen führt. Die wesentlichen Grundsätze sind: In Erfahrungssätzen dürfen die empirischen Faktoren nicht willkürlich durch reine (unbenannte) Zahlen ersetzt werden (Beispiel aus der Mechanik: die Gravitationskonstante im Massenanziehungsgesetz darf nicht durch eine unbenannte Zahl ersetzt werden); jeder Erfahrungssatz, durch den die Definition (Ableitung) einer Größe möglich ist, ist dafür zu benützen. Verletzt man den ersten Grundsatz, so vermindert man unzulässig die Anzahl der von einander unabhängigen Größen, verletzt man den zweiten, so vermehrt man sie unnötig. Stellt man, indem man diese Grundsätze beobachtet, die Größengleichungen der Elektrizitätslehre der Reihe nach auf, so findet man, daß *vier Größen von einander unabhängig* sind. Dabei muß sogleich der Irrtum abgewiesen werden, daß diese Anzahl für alle Zeiten fest stünde. Eine Vergrößerung der physikalischen Erfahrung kann sie verändern, nämlich vermindern, wenn neue Zusammenhänge bisher bekannter Erscheinungen gefunden werden, oder vermehren, wenn neue Erscheinungen gefunden werden, die auf die bis dahin bekannten nicht zurückführbar sind. Aber gemessen an dem heutigen Stand des Erfahrungswissens, so kann man mit einem hohen Grad von Sicherheit sagen, ist die Anzahl vier vor allen anderen dadurch ausgezeichnet, daß sie bei Anwendung ganz bestimmter Grundsätze als notwendig und hinreichend gefunden wird<sup>2</sup>.

## 2. Mechanische Größen der Elektrizitätslehre in der Literatur

Die mechanischen Einheiten der elektrischen und magnetischen Größen wurden etwa in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts entwickelt. Haben die Klassiker der Physik jener Zeit die Ansicht vertreten, daß die elektrischen und magnetischen *Größen* mechanische Größen seien, deswegen, weil die *Einheiten* durch Potenzenprodukte aus Zentimeter, Gramm und Sekunde dargestellt wurden? Man müßte eine Antwort auf diese Frage durch das Studium der Literatur finden können.

<sup>1</sup> Verf., Arch. f. Elektrotechn. 45 (1960) S. 78—98.

<sup>2</sup> Wir betrachten als zweites Beispiel für die zwei verschiedenen Auffassungen den magnetischen Induktionsfluß. Zunächst die Auffassung, daß die Anzahl der Grundgrößen wählbar ist: Für die physikalische Erscheinung „Induktionsfluß“ hat man nach der mechanischen Auffassung (drei mechanische Grundgrößen) zwei verschiedene Größen definiert, die wir vorübergehend  $\Phi_e$  und  $\Phi_m$  schreiben wollen, und nach der elektrodynamischen Auffassung eine andere Größe, die wir  $\Phi$  schreiben; schließlich ist auch schon gefordert worden, daß die physikalische Erscheinung „Induktionsfluß“ durch eine Größe zu beschreiben sei, die nicht mehr aus anderen abgeleitet werden könne; wir wollen sie vorübergehend  $\Phi^V$  schreiben. Alle vier Größen  $\Phi_e$ ,  $\Phi_m$ ,  $\Phi$ ,  $\Phi^V$  tragen denselben Namen „Induktionsfluß“, alle sind definitionsmäßig von einander verschieden, sie sind nicht mit einander in dem Sinn vergleichbar, daß aus ihnen physikalisch sinnvoll Summen oder Differenzen gebildet werden könnten oder daß es möglich wäre zu sagen, die eine sei ein zahlenmäßiges Vielfaches einer anderen.

Nach der anderen Auffassung, daß eine notwendige und hinreichende Anzahl von Grundgrößen bestimmbar ist, gilt: Es gibt eine Größe „Induktionsfluß“  $\Phi$ . Die verschiedenen Einheiten dieser Größe unterscheiden sich von einander um Faktoren, die reine (unbenannte) Zahlen sind, jede Einheit ist ein zahlenmäßiges Vielfaches jeder anderen.



Mehrere Literaturstellen jener Zeit, in denen die Größen der Elektrizitätslehre mehr oder weniger deutlich zu mechanischen Größen erklärt werden, hat U. STILLE zusammengestellt<sup>3</sup>. Wir führen drei Stellen auszugsweise hier an, von denen die erste am deutlichsten ist<sup>4</sup>. In ihr wird der elektrische Widerstand gleich gesetzt mit der Geschwindigkeit. Aber diese Größe ist ein Vektor, der elektrische Widerstand ist ein Skalar. Im Tensorcharakter sind die beiden Größen, deren Gleichheit behauptet wird, von einander verschieden.

Zur Beantwortung der oben erhobenen Frage trägt noch folgende Überlegung bei:

Zu den mechanischen Einheiten gehören unter anderem die elektrostatische CGS-Einheit der elektrischen Spannung  $[U]_e = 1/\sqrt{\text{dyn}}$  und die elektromagnetische CGS-Einheit des elektrischen Stromes  $[I]_m = 1/\sqrt{\text{dyn}}$ , wobei  $1 \text{ dyn} = 1 \text{ cm} \cdot \text{g/s}^2$  die CGS-Einheit der mechanischen Kraft  $F$  ist. Für die CGS-Größen („Dreiergrößen“), die diesen CGS-Einheiten entsprechen, gilt dann: für die Spannung  $U_e^2 = F$ , für den Strom  $I_m^2 = F$ , das heißt: einerseits das Spannungsquadrat, andererseits das Stromquadrat ist eine Größe derselben Art, wie die mechanische Kraft; man kann physikalisch sinnvoll die Differenz zwischen einem Spannungsquadrat und einer Kraft und zwischen einem Stromquadrat und einer Kraft bilden. Diese elektrischen Größen sind eben in der Tat mechanische Größen. Aber das Spannungsquadrat und das Stromquadrat sind Skalare, die Kraft ist ein Vektor.

Bei den „Dreiergrößen“ wird offenbar von den Einheiten auf die Größen geschlossen. Dieser Schluß ist immer gewagt. Nur der umgekehrte ist eindeutig.

Es muß ferner auffallen, daß in der Zeit der Erschaffung der mechanischen Einheiten wohl die Rede davon war, daß zum Beispiel der elektrische Widerstand eines Stromleiters gleich sei mit einer Geschwindigkeit, oder daß die Kapazität eines Kondensators gleich sei mit einer Länge, daß man aber wohl kaum die umgekehrte Ansicht vertrat, daß nämlich zum Beispiel eine bestimmte Geschwindigkeit, etwa eine Geschwindigkeitseinheit, verkörpert werde durch eine Rolle Widerstandsdraht, oder daß eine bestimmte Strecke, etwa die Länge eines Kurvenstückes, zu messen sei mit Hilfe der Kapazität eines Kondensators. Die Bezugnahme der Elektrizitätslehre auf die Mechanik hielt man für unzweifelhaft gerechtfertigt, die umgekehrte Richtung hielt man offenbar, wenn auch stillschweigend, doch für bedenklich.

Die Antwort auf die Frage, ob die Größen der Elektrizitätslehre als mechanische Größen („Dreiergrößen“) in der Literatur nachweisbar sind, verliert entscheidend an Wichtigkeit angesichts der Tatsache, daß in der Zeit, in der die mechanischen Einheiten entwickelt wurden, die Physik von dem Größenbegriff kaum Gebrauch gemacht hat. Seine Wichtigkeit ist erst durch die Arbeiten WALLOTS (seit 1922) hervorgetreten. Man darf wohl sagen: die Klassiker der Physik des vergangenen Jahrhunderts haben nicht beabsichtigt, Größen zu definieren, sondern sie haben Einheiten entwickelt, um mit Zahlenwerten in Gleichungen rechnen zu können. Deswegen war die theoretische Fundierung der Einheiten von geringerem Interesse und ihre genaue betragsmäßige Festlegung die Hauptsache. Man hat nicht mit Größen-gleichungen gerechnet, sondern mit Zahlenwertgleichungen, diese jeweils bezogen auf ein

<sup>3</sup> U. STILLE, Messen und Rechnen in der Physik, bes. S. 208/209. Braunschweig 1955.

<sup>4</sup> a) „Im allgemeinen ersieht man hieraus, daß der Quotient irgendeiner elektromotorischen Kraft dividiert durch irgendeine Stromintensität irgend einer Geschwindigkeit gleich ist . . . . Dieser Widerstand also muß einer gewissen Geschwindigkeit gleich sein . . .“ W. WEBER in: Abh. d. königl. Ges. d. Wiss. Göttingen 10 (1862), Abh. d. math. Cl. S. 1—96.

b) „... c'est en prenant pour mesure pratique de résistance une résistance qui est représentée dans le système absolu par une vitesse de 1000 millions de centimètres par seconde, que l'on obtient l'ohm. . .“ W. THOMSON in: Congrès International des Electriciens, Paris 1881, Comptes rendus de travaux (Paris 1882) S. 42.

Nach a) ist ein Widerstand gleich einer Geschwindigkeit, nach b) wird ein Widerstand „im absoluten System dargestellt (repräsentiert) durch eine Geschwindigkeit“.

c) „The phenomena by which electricity is known to us are of mechanical kind, and therefore they must be measured by mechanic units or standards.“ J. C. MAXWELL u. F. JENKIN in: Report of the thirty-third meeting of the British Association for the Advancement of Science . . . London (1864) S. 131.

In c) werden die mechanischen Einheiten damit gerechtfertigt, daß die Erscheinungen, „durch die wir die Elektrizität erkennen“, von mechanischer Art seien. Von mechanischen Größen ist nicht die Rede.



gewähltes Einheitensystem. Um nicht mit den Einheiten rechnen zu müssen, hat man überhaupt nur solche Einheiten als „System“ gelten lassen, die unter einander kohärent sind, in deren Beziehungen also kein anderer Zahlenfaktor auftritt, als exakt eins.

Es wird ja wohl häufig gesagt, das „elektromagnetische CGS-System“ entstehe dadurch, daß man die Permeabilität  $\mu$  zu einer reinen (unbenannten) Zahl mache, die im Vakuum den Wert eins hat, und das „elektrostatische CGS-System“ entstehe dadurch, daß man dort mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  ebenso verfähre. Diese Behauptung ist auch zutreffend, wenn man ausschließlich an Zahlenwertgleichungen denkt: in der Tat ist der Zahlenwert  $\{\mu\} = 1$  und der Zahlenwert  $\{\varepsilon\} = 1$  für Vakuum. In einer Zeit, in der man praktisch ausschließlich Zahlenwertgleichungen kannte und benutzte, konnte man kaum darin einen Fehler finden, daß man die Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante zu reinen (unbenannten) Zahlen erklärte. Nach der Größenlehre jedoch sind  $\mu$  und  $\varepsilon$  Proportionalitätsfaktoren von Erfahrungssätzen, und solche können in der Größenlehre grundsätzlich nicht zu reinen (unbenannten) Zahlen gemacht werden (vergl. <sup>1</sup>).

### 3. Experimentelle Definitionen von Einheiten

Von einer experimentellen Definition wollen wir sprechen, wenn die Einheit dadurch festgelegt wird, daß eine Normalanordnung und ein Normalzustand angegeben werden. Sehr bekannt ist die experimentelle Definition der Ladungseinheit nach dem COULOMBSchen Kraftgesetz der Elektrostatik für zwei kleine Ladungsträger und die experimentelle Definition der Stromstärkeinheit nach dem AMPÈRESchen Kraftgesetz für zwei parallele lineare Stromleiter.

Eine solche experimentelle Definition hat die Eigentümlichkeit, daß sie mit mehr als einer Form der ihr entsprechenden Gleichung verträglich ist. Aus ihr kann daher auf die Anzahl der zu Grunde gelegten unabhängigen Größen nicht geschlossen werden. Sie selbst sagt nichts darüber aus, auf welche Weise sie größenmäßig ausgelegt werden soll, eine Aussage darüber muß zusätzlich gemacht werden. Experimentelle Definitionen allein sind nicht geeignet, Einheiten eindeutig zu definieren.

Wir betrachten zum Beispiel die folgende experimentelle Definition:

a) Zwei Ladungsträger von vernachlässigbaren Abmessungen sind im Vakuum im Abstand 1 cm voneinander angeordnet, die Ladungen auf beiden Trägern sind gleich groß. Die Einheit der Ladung ist dann vorhanden, wenn die elektrostatische Kraft zwischen beiden Ladungsträgern  $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$  beträgt.

Es handelt sich nun darum, von dieser Feststellung zu der definierenden Einheitengleichung zu kommen. Hält man erstens die Gleichung

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_{\text{rel}} r^2} \quad (3.1)$$

für eine zulässige Form des COULOMBSchen Gesetzes, so erhält man mit  $Q_1 = Q_2$  und dem Vakuumwert  $\varepsilon_{\text{rel}} = 1$  die Einheitengleichung

$$1[Q]_e = 1 \text{ cm} \sqrt{\text{dyn}} = \frac{1}{s} \sqrt{\text{g} \cdot \text{cm}^3}, \quad (3.2)$$

die man gewohnt ist, unter der Bezeichnung „elektrostatische CGS-Einheit der elektrischen Ladung“ zu finden<sup>5</sup> (wir haben deswegen den Index  $e$  angefügt). — Nach der Größenauffassung kann aber die Proportionalitätskonstante  $\varepsilon$  im COULOMBSchen Gesetz nicht zur reinen (unbenannten) Zahl ( $\varepsilon_{\text{rel}}$  in (3.1)) gemacht werden, und ihr Vakuumwert ist  $\varepsilon_0$ . Wir unter-

<sup>5</sup> Hätte man an Stelle von (3.1) geschrieben

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \varepsilon_{\text{rel}} r^2}, \quad (3.1a)$$

so hätte sich an Stelle von (3.2) ergeben

$$1[Q]'_e = [Q]_e \sqrt{4 \pi}, \quad (3.2a)$$

die beiden Einheiten unterscheiden sich um den Zahlenfaktor  $\sqrt{4 \pi}$ .



legen daher derselben experimentellen Definition a) zweitens die Gleichung

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon r^2} \quad (3.3)$$

und erhalten die Ladungseinheit

$$1[Q]_e^* = 1 \text{ cm} \sqrt{\text{dyn} \cdot 4 \pi \epsilon_0} = \frac{1}{s} \sqrt{g \cdot \text{cm}^3 \cdot 4 \pi \epsilon_0} . \quad (3.4)$$

In dieser Form hat zuerst WALLOT die elektrostatische CGS-Einheit der elektrischen Ladung angegeben<sup>6, 7</sup>. Später hat dann DE BOER vorgeschlagen<sup>8</sup>, dieser Einheit den Namen „Franklin“, Kurzzeichen Fr, zu geben:

$$1 \text{ Fr} \equiv 1[Q]_e^* . \quad (3.5)$$

In neueren Druckschriften wird die angeführte experimentelle Definition a) ebenso für diese Einheit (3.4,5) in Anspruch genommen, wie in älteren Lehrbüchern für die Einheit (3.2). Aber die beiden Einheiten (3.2) und (3.4,5) sind natürlich nicht Größen gleicher Art; die experimentelle Definition ist für beide dieselbe.

Wir betrachten ferner die beiden folgenden experimentellen Definitionen:

b) Zwei unendlich lange, parallele gerade Stromleiter von vernachlässigbarem Querschnitt und der Permeabilität des Vakuums sind im Vakuum im Abstand von 1 cm voneinander angeordnet, sie werden von demselben Gleichstrom durchflossen. Die Einheit der Stromstärke ist dann vorhanden, wenn die elektrodynamisch verursachte Kraft zwischen den beiden Leitern 2 dyn = 2 g · cm/s<sup>2</sup> für jeden Abschnitt der Länge 1 cm beträgt.

c) Zwei unendlich lange, parallele gerade Stromleiter von vernachlässigbarem Querschnitt und der Permeabilität des Vakuums sind im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnet, sie werden von demselben Gleichstrom durchflossen. Dieser hat die Stromstärke 1 Ampere, wenn die elektrodynamisch verursachte Kraft zwischen den Leitern 2 · 10<sup>-7</sup> N = 2 · 10<sup>-7</sup> kg · m/s<sup>2</sup> für jeden Abschnitt der Länge 1 m beträgt.

Um von diesen experimentellen Definitionen zu den definierenden Einheitengleichungen zu kommen, legen wir, entsprechend a), erstens die Gleichung

$$F = \frac{2 \mu_{\text{rel}} I_1 I_2 l}{r} \quad (3.6)$$

zu Grunde und zweitens die Gleichung

$$F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2 \pi r} ; \quad (3.7)$$

$\mu$  ist die Permeabilität, diese als physikalische Größe verstanden,  $\mu_0$  ihr Vakuumwert.

Aus der experimentellen Definition b) erhält man mit (3.6) die Stromstärkeeinheit

$$1[I]_m = 1 \sqrt{\text{dyn}} = \frac{1}{s} \sqrt{g \cdot \text{cm}} ; \quad (3.8)$$

diese Beziehung wird gewöhnlich als „elektromagnetische CGS-Einheit der elektrischen Stromstärke“ bezeichnet (wir haben deswegen den Index  $m$  angefügt).

Aus derselben experimentellen Definition b) erhält man jedoch mit (3.7) die Stromstärkeeinheit

$$1[I]_m^* = 1 \sqrt{\text{dyn} \cdot 4 \pi / \mu_0} = \frac{1}{s} \sqrt{g \cdot \text{cm} \cdot 4 \pi / \mu_0} . \quad (3.9)$$

In dieser Form hat zuerst WALLOT die elektromagnetische CGS-Einheit der Stromstärke angegeben<sup>9, 7</sup>. DE BOER hat vorgeschlagen<sup>8</sup>, dieser Einheit den Namen „Biot“, Kurzzeichen Bi, zu geben:

$$1 \text{ Bi} \equiv 1[I]_m^* . \quad (3.10)$$

<sup>6</sup> J. WALLOT, Handbuch der Physik, hersgg. von H. GEIGER u. K. SCHEEL, Band II, Kap. 1, S. 1—41. Berlin: Springer 1926, hier: S. 31, und ausführlich in <sup>7</sup>.

<sup>7</sup> J. WALLOT, Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen. 2. Aufl., S. 54 u. f. Leipzig 1957.

<sup>8</sup> J. DE BOER, Ned. T. Natuurkde. 16 (1950) S. 293; 17 (1951) S. 5.

<sup>9</sup> J. WALLOT, Elektrot. Z. 64 (1943) S. 229—233, Gl. (30); ausführlicher in <sup>7</sup>.



Aus der experimentellen Definition c) erhält man mit (3.6) die Stromstärkeeinheit

$$1[I] = \sqrt{N/10^7} = \frac{1}{s} \sqrt{\text{kg} \cdot \text{m}/10^7} = \frac{[I]_m}{10} \quad (3.11)$$

mit  $[I]_m$  nach (3.8). Der Einheit (3.11) hat man früher den Namen „Ampere des Quadrant-Systems“ gegeben, wir schreiben sie

$$1 A_Q = \frac{1}{10} [I]_m = \frac{1}{10} \frac{1}{s} \sqrt{g \cdot \text{cm}}. \quad (3.12)$$

Aus derselben experimentellen Definition c) erhält man mit (3.7) die andere Einheit

$$1 A = 1 \sqrt{N \cdot 4 \pi / 10^7 \mu_0} = \frac{[I]_m^*}{10}; \quad (3.13)$$

das Ampere ist der zehnte Teil der WALLOTSchen elektromagnetischen CGS-Einheit, die Biot heißt.

Nun ist aber c) die anerkannte Definition der Stromstärkeeinheit Ampere des „Systems der Internationalen Einheiten“ (in sinngemäßer Verdeutschung des englischen oder französischen Wortlautes der Festlegung). Man kann also diese experimentelle Definition entweder nach (3.11) verstehen, dann ist das Ampere auf die drei Grundeinheiten der Mechanik m, kg, s zurückgeführt:  $A_Q$  nach (3.12), oder man kann sie nach (3.13) verstehen, dann ist das Ampere mit den Einheiten m, kg, s und  $\mu_0$  dargestellt: A. Die experimentelle Definition allein ist nicht eindeutig, sie paßt sowohl auf das Ampere des Quadrantensystems  $A_Q$ , als auch auf das Ampere des Internationalen Systemes A. Aus ihr erhält man eindeutig das Ampere des Internationalen Systems dadurch, daß man zum Beispiel zusätzlich angibt, daß definitionsweise die Induktionskonstante  $\mu_0 = 4 \pi N/10^7 A^2$  sei<sup>10</sup>.

#### 4. Korrespondenzen (Entsprechungen) oder Gleichungen?

Geht man von der im 1. Abschnitt beschriebenen Auffassung aus, die Anzahl der Grundgrößen sei frei wählbar, so entstehen je nach Wahl für ein und dieselbe physikalische Erscheinung physikalische Größen, die definitionsmäßig von einander verschieden sein können, von denen also nicht etwa physikalisch sinnvoll Summen oder Differenzen gebildet werden können. Man kann zunächst nur sagen: sie entsprechen einander, deswegen, weil sie dieselbe physikalische Erscheinung beschreiben. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Einheiten, denn Einheiten sind nichts anderes, als ausgewählte, verabredete, konstante Bezugsgrößen. Man kann also nach dieser Auffassung zum Beispiel ein und denselben elektrischen Strom ausdrücken durch die Quadrant-Stromstärke

$$I_Q = \{I\}_Q \cdot A_Q, \quad (4.1)$$

oder durch die praktische Stromstärke

$$I = \{I\} \cdot A. \quad (4.2)$$

Da die beiden Größen  $I_Q$  und  $I$  verschieden definiert sind, ist ihr Quotient wieder eine physikalische Größe, nicht etwa eine reine (unbenannte) Zahl:

$$\frac{I}{I_Q} = \frac{\{I\}}{\{I\}_Q} \cdot k; \quad k \text{ Größe}. \quad (4.3)$$

Gleichungen von der Art, wie (4.1) und (4.2), sind verträglich mit

$$\frac{I_Q}{A_Q} = \frac{I}{A}, \quad (4.3a)$$

also damit verträglich, daß die Zahlenwerte der beiden verschieden definierten Größen gleich sind:  $\{I\}_Q = \{I\}$ . Im vorliegenden Fall besteht diese Gleichheit. Sie muß aber nicht etwa notwendig in jedem Falle bestehen.

<sup>10</sup> So zum Beispiel U. STILLE in: F. KOHLRAUSCH, Praktische Physik, Band I, 20. Aufl., S. 11. Stuttgart 1955. Ferner die Norm DIN 1357, Einheiten elektrischer Größen (1958).



Die Theorie, die von der Auffassung der frei wählbaren Anzahl der Grundgrößen ausgeht, hat die Aufgabe, die Beziehungen aller Größen aller durch die Wahlen entstandenen „Größensysteme“ zu einander herzustellen; die Umrechnungsfaktoren sind wieder, wie in (4.3), physikalische Größen. Die Lösung dieser Aufgabe ist nicht schwierig, aber recht umfangreich und für den praktischen Gebrauch wohl auch umständlich. Gegenwärtig werden 4 bis 5 solcher „Größensysteme“ in der Literatur erwähnt. Um nun nicht die große Menge von Größenquotienten angeben zu müssen, die wieder Größen sind, beschränken sich die Darstellungen, die von dieser Auffassung ausgehen, gewöhnlich darauf, die Umrechnung der Zahlenwerte für die Zahlenwertgleichungen anzugeben<sup>11</sup>. Damit aber hat man im Grunde Verzicht geleistet auf die weit vollkommenere Darstellung physikalischer Sachverhalte durch Größengleichungen: diese sind unabhängig von der Willkür der Einheiten, Zahlenwertgleichungen sind das (natürlich) nicht. Die Auffassung von der Wählbarkeit der Anzahl der Grundgrößen und damit von den verschiedenen „Größensystemen“ hat praktisch die Auswirkung, daß man wieder zu den Zahlenwertgleichungen zurückkehrt und also den Fortschritt ungenützt läßt, der durch die Entwicklung der Größengleichungen erreicht wurde.

Die Einheiten zweier Größen, die für dieselbe physikalische Erscheinung verschieden definiert sind, entsprechen einander. Man findet diese Tatsache in vielen Lehrbüchern, aber auch in Druckschriften jüngster Zeit dargestellt zum Beispiel durch

$$1[Q]_e \triangleq 1 \text{ Fr} = 1[Q]_e^* , \quad (4.4)$$

$$1[I]_m \triangleq 1 \text{ Bi} = 10 \text{ A} = 1[I]_m^* . \quad (4.5)$$

Das Symbol  $a \triangleq b$  soll gelesen werden:  $a$  korrespondiert mit  $b$ , oder:  $a$  entspricht  $b$ . Aber man mißversteht das Korrespondenzsymbol  $\triangleq$ , wenn man es für ein mathematisches Zeichen hält. Es ist mathematisch nicht erklärt und besagt darum auch mathematisch nichts: man kann nicht mit ihm rechnen. (Oft genug wird es in Rechnungen mit dem Gleichheitszeichen verwechselt, im genauen Gegensatz dazu, daß es eine Gleichheit gerade nicht ausdrücken soll).

Darstellungen von der Art (4.4, 5) können darum nicht befriedigen. Sie sind auch ganz überflüssig, denn sie können in jedem Fall durch Gleichungen ersetzt werden. Nur mit Gleichungen kann man rechnen, nicht aber mit Korrespondenzen. Zwischen den Einheiten, die in den Korrespondenzen (4.4) und (4.5) genannt sind, bestehen Gleichungen. Sie lassen sich aus den Ergebnissen des 3. Abschnittes ablesen:

$$1[Q]_e \sqrt{4 \pi \varepsilon_0} = 1 \text{ Fr} = 1[Q]_e^* , \quad (4.6)$$

$$1[I]_m \sqrt{4 \pi / \mu_0} = 1 \text{ Bi} = 10 \text{ A} = 1[I]_e^* . \quad (4.7)$$

Nicht nur diese, sondern auch alle anderen Korrespondenzen kann man so durch Gleichungen ersetzen. Man braucht dabei nur den einen Faktor

$$k = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{10^{-7}} \text{ kg} \cdot \text{m}} = \frac{10 \text{ A}}{\sqrt{\text{dyn}}} , \quad (4.8)$$

denn es ist der andere, in (3.4) und (4.6) auftretende Faktor

$$\sqrt{4 \pi \varepsilon_0} = \frac{k}{c_0} \quad (4.9)$$

mit dem Vakuumwert der Lichtgeschwindigkeit

$$c_0 = \alpha \frac{\text{cm}}{\text{s}} ; \quad (4.10)$$

der derzeit beste Meßwert ist  $\alpha \approx 2,99792 \cdot 10^{10}$ . Daher gilt auch schließlich

$$1 \text{ Fr} = \frac{1}{\alpha} \text{ Bi} \cdot \text{s} = \frac{10}{\alpha} \text{ A} \cdot \text{s} \quad (4.11)$$

oder umgeschrieben

$$1 [Q]_e^* = \frac{1}{\alpha} [I]_m^* \cdot \text{s} = \frac{1}{\alpha} [Q]_m^* , \quad (4.11)$$

<sup>11</sup> Beide Darstellungen jedoch zum Beispiel bei U. STILLE<sup>3</sup>, S. 362 und 366. Den Umrechnungsfaktoren zwischen Zahlenwerten wird der Vorzug gegeben: S. 235.



in Worten: das Verhältnis der elektromagnetischen CGS-Einheit der Ladung  $1[Q]_e^*$  zur elektrostatischen  $1[Q]_m^*$  ist der Zahlenwert der Vakuumlichtgeschwindigkeit, diese gemessen in  $\text{cm/s}^{12}$ .

Bei der Auffassung von der freien Wählbarkeit der Anzahl der Grundgrößen und der daraus entstehenden verschiedenen Größensysteme ist der Quotient der Einheiten zweier Größen, die in zwei verschiedenen Systemen für dieselbe physikalische Erscheinung verschieden definiert sind, wieder eine Größe (Beispiele: (4.8, 9)). Ganz erheblich einfacher werden die Zusammenhänge bei der Auffassung, daß die notwendige und hinreichende Anzahl der Grundgrößen feststellbar ist. Hat man diese Anzahl bestimmt (wir hatten sie zu vier gefunden) und hat man die von einander unabhängigen Grundgrößen in dieser Anzahl gewählt, so gibt es für ein und dieselbe physikalische Erscheinung eine und nur eine sie beschreibende physikalische Größe<sup>13</sup>. Ihre verschiedenen Einheiten können sich voneinander nur durch Zahlenfaktoren unterscheiden, und die Einheitenverhältnisse sind die Reziproken der entsprechenden Zahlenwertverhältnisse: Sind zum Beispiel  $[I]_1$  und  $[I]_2$  Einheiten derselben physikalischen Größe  $I$ , so ist natürlich

$$\frac{\{I\}_1}{\{I\}_2} = \frac{[I]_2}{[I]_1} = \zeta; \quad \zeta \text{ reine (unbenannte) Zahl.} \quad (4.12)$$

Es liegt auf der Hand, daß man bei dieser Auffassung die Umrechnung sehr viel einfacher darstellen und durchführen kann<sup>14, 15</sup>. Hier sind eben die Einheitenbeziehungen eine Folge der vorher und unabhängig aufgestellten Größengleichungen. Als Beispiele seien angeführt in leichtverständlicher Schreibweise

$$\left. \begin{aligned} I &= \{I\}_A \quad A = \{I\}_m [I]_m^* \\ \text{daher} \quad \frac{\{I\}_A}{\{I\}_m} &= \frac{[I]_m^*}{A} = 10 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

wegen (3.9) und (3.13), ferner

$$\left. \begin{aligned} Q &= \{Q\}_m [Q]_m^* = \{Q\}_e [Q]_e^* \\ \text{daher} \quad \frac{\{Q\}_e}{\{Q\}_m} &= \frac{[Q]_m^*}{[Q]_e^*} = \alpha; \quad \alpha \text{ reine (unbenannte) Zahl} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

wegen (3.4), (3.9) und (4.11).

### Zusammenfassung

Für die Ableitung der Größen der Elektrizitätslehre aus Grundgrößen gibt es die eine Auffassung, daß die Anzahl der voneinander unabhängigen Grundgrößen frei wählbar ist, und die andere Auffassung, daß methodisch, durch Anwendung bestimmter Grundsätze, die notwendige und hinreichende Anzahl der von einander unabhängigen Grundgrößen festgestellt werden kann. Es werden einige Folgen dargelegt, die sich für die Definitionen der Größen und der Einheiten aus der einen und aus der anderen Auffassung ergeben.

Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, Karlsruhe, Technische Hochschule Karlsruhe

<sup>12</sup> Weitere Ausführungen hierzu: Verf., Arch. f. Elektrotechn. 43 (1957) S. 212—214.

<sup>13</sup> Sofern man von Paralleldefinitionen absieht: eine solche entsteht dadurch, daß man für dieselbe physikalische Erscheinung zwei Größen definiert, die sich voneinander um einen Faktor unterscheiden, der eine reine (unbenannte) Zahl ist, wie zum Beispiel die rational und die nicht rational definierte magnetische Feldstärke, deren Verhältnis durch die reine (unbenannte) Zahl  $4\pi$  gegeben ist.

<sup>14</sup> J. WALLOT<sup>6, 7, 9</sup>; Verf. in: Taschenbuch für Elektrotechniker, hergg. von F. MOELLER, Band I, S. 255 bis 260 (1953); Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, Band I, 28. Aufl. S. 253—263 (1955).

<sup>15</sup> „Der Realist behält sich vor zu sagen: Spannung ist Spannung, und die Maßzahlen verhalten sich umgekehrt proportional zu den Einheiten. Zum Beispiel will er sagen dürfen: 1 elektrostatische Spannungseinheit gleich  $3 \cdot 10^{10}$  elektromagnetische Spannungseinheiten.“ H. KÖNIG, Bull. Schweiz. Elektrot. Ver. 41 (1950) S. 625. Ebenso: K. KÜPFMÜLLER, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Anhang: Maßsysteme, zum Beispiel 6. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1959, S. 499.



# Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler

Von

SIEGFRIED NAHRGANG, Mannheim

Mit 19 Textabbildungen

(Eingegangen am 10. Juni 1959)

**Inhaltsübersicht:** Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler — Die Wandlergesetze: Wandler erster Art; Wandler zweiter Art — Die Gleichstrom-Nebenschlußmaschine als elektromagnetisch-mechanischer Energiewandler: Leerlauf; Belastung; Laststöße; Bestimmung von  $R_A$  und  $R_L$ ; Frequenzgänge — Zusammenfassung.

## Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler

Wie eine umfangreiche Literatur<sup>1</sup> zeigt, beschäftigt man sich schon seit langem mit der Theorie der elektroakustischen Wandler, also jener Gebilde, die in gasförmigem, flüssigem oder festem Medium elektrische Energie in Schallenergie und umgekehrt wandeln. Die Übereinstimmung im Aufbau der für elektrische Schwingungskreise gültigen Differentialgleichungen mit jenen für mechanische schwingungsfähige Systeme hat ebenfalls schon vor geraumer Zeit zu Analogiebetrachtungen zwischen elektrischen und mechanischen Größen Veranlassung gegeben. Es erscheint daher nützlich, die Wandlergesetze auf einen der wirtschaftlich bedeutendsten Energiewandler der Starkstromtechnik, den bei modernen geregelten Antrieben in großem Umfang eingesetzten Gleichstrom-Nebenschluß-Motor anzuwenden. Die aus der Literatur bekannten Gesetzmäßigkeiten, denen die elektromagnetisch-mechanischen Energiewandler gehorchen, seien der Vollständigkeit halber und zum besseren Verständnis des Folgenden zunächst nochmals hergeleitet.

### Die Wandlergesetze

Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler, nachstehend meist kurz Wandler genannt, dienen zur Umwandlung mechanischer Energie in elektrische und umgekehrt. Ihre

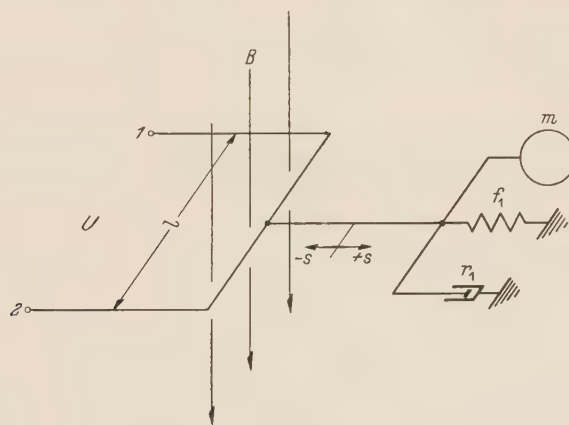


Bild 1. Wandler erster Art.

Wirkungsweise beruht auf der Nutzung der Kraft, die auf einen stromdurchflossenen Leiter im magnetischen Feld ausgeübt wird. Je nachdem, ob dieser Leiter dabei eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung macht, oder als Schleife im Magnetfeld rotiert, sei zwischen Wandlern erster Art und Wandlern zweiter Art unterschieden.

### Wandler erster Art

In einem homogenen stationären Magnetfeld der Induktion  $B$  (Bild 1) befindet sich ein Stab der Länge  $l$ . Er ist so aufgehängt, daß er sich nur in der Richtung des Weges  $s$  gerad-

<sup>1</sup> s. Literaturverzeichnis am Schluß.



linig hin- und herbewegen kann.  $B$ ,  $l$  und  $s$  sollen senkrecht aufeinander stehen. Wird der Stab von einem Strom  $I$  durchflossen, so ist die auf ihn ausgeübte Kraft bekanntlich

$$F = B l I. \quad (1)$$

Sie ist eine Wechselkraft, wenn der Strom gemäß

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (2)$$

als sinusförmiger Wechselstrom angenommen wird. Die Auslenkung der hin- und hergehenden Bewegung ist dann

$$s = \tilde{s}_0 e^{j\omega t} \quad (3)$$

und die zwischen den Enden des Stabes durch Induktionswirkung hervorgerufene elektrische Spannung

$$U = B l \frac{ds}{dt} = w_1 j \omega \tilde{s}_0 e^{j\omega t}, \quad (4)$$

wobei  $B l = w_1$  gesetzt ist. Die Größe ist eine Gerätekonstante und wird künftig Wandlerkonstante erster Art genannt.

Der Stab ist belastet mit einer Masse  $m$ , einer wegproportionalen Rückstellkraft (Feder) mit der Federsteife  $f_1$  und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung mit dem Reibungskoeffizienten  $r_1$ . Dann lautet die Gleichung der Bewegung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + r_1 \frac{ds}{dt} + f_1 s = w_1 I, \quad (5)$$

daher

$$I = \frac{\tilde{s}_0}{w_1} (-\omega^2 m + j \omega r_1 + f_1) e^{j\omega t}. \quad (6)$$

Von der elektrischen Seite aus gesehen stellt der Wandler einen Zweipol mit den Eingangs-klemmen 1 und 2 dar, dessen Eingangsleitwert sich aus Gl. (4) und Gl. (6) berechnet zu

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{I}{U} = \frac{-\omega^2 m + j \omega r_1 + f_1}{j w_1^2 \omega}, \quad (7)$$

$$\mathfrak{Y}_1 = j \omega \frac{m}{w_1^2} + \frac{r_1}{w_1^2} + \frac{1}{j \omega \cdot \frac{w_1^2}{f_1}}. \quad (7a)$$

Der Leitwert  $\mathfrak{Y}_1$  besteht aus der Parallelschaltung eines Wirkleitwertes der Größe

$$G_1 = \frac{r_1}{w_1^2}, \quad (8)$$

eines kapazitiven Leitwertes der Größe

$$\omega C_1 = \omega \cdot \frac{m}{w_1^2} \quad (9)$$

und eines induktiven Leitwertes der Größe

$$\frac{1}{\omega L_1} = \frac{1}{\omega \cdot \frac{w_1^2}{f_1}}, \quad (10)$$

so daß man auch schreiben kann

$$\mathfrak{Y}_1 = G_1 + j \omega C_1 + \frac{1}{j \omega L_1}. \quad (11)$$

Bezeichnet man die Division durch das Quadrat der Wandlerkonstanten als eine Reduktion, so wirkt also auf der elektrischen Seite des Wandlers der reduzierte Reibungskoeffizient wie ein Leitwert (nicht etwa Widerstand), die reduzierte Masse wie eine Kapazität (nicht etwa Induktivität) und die reduzierte Federsteife wie der Kehrwert einer Induktivität (nicht etwa Kapazität) [1], [2] u. a. m.



### Wandler zweiter Art

Die Anordnung entspricht Bild 2. Eine um die Achse  $A-A$  drehbare Leiterschleife mit der wirksamen Drahtlänge  $l$  und der Breite  $d$  befindet sich in einem radialhomogenen stationären magnetischen Feld der Induktion  $B$ . Das System ist belastet mit einem Trägheitsmoment  $J$ , einer dem Verdrehungswinkel proportionalen Rückstellkraft (Feder) mit der Federsteife  $f_2$  und einer der Winkelgeschwindigkeit der Verdrehung proportionalen Reibung mit dem Reibungskoeffizienten  $r_2$ .

Ein durch die Leiterschleife fließender Strom  $I$  bringt das Drehmoment

$$M = B l \frac{d}{2} I \quad (12)$$

hervor.

Ist  $I$  ein Wechselstrom der Frequenz  $\omega$ , so ist  $M$  ein Wechselmoment der gleichen Frequenz, das periodisch hin- und hergehende Bewegungen um den Winkel

$$\alpha = \alpha_0 e^{j\omega t} \quad (13)$$

verursacht. Hierdurch wird durch Induktionswirkung an den Enden der Leiterschleife die elektrische Spannung

$$U = B l \frac{d}{2} \Omega \quad (14)$$

hervorgerufen, wobei

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = j \omega \alpha_0 e^{j\omega t} \quad (15)$$

die Winkelgeschwindigkeit und

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\omega^2 \alpha_0 e^{j\omega t} \quad (16)$$

die Winkelbeschleunigung ist.

Auf dem gleichen Weg wie beim Wandler erster Art erhält man den an den elektrischen Eingangsklemmen des Wandlers auftretenden Leitwert zu

$$\mathfrak{Y}_2 = j \omega \frac{J}{w_2^2} + \frac{f_2}{j \omega w_2^2} + \frac{r_2}{w_2^2}. \quad (17)$$

Dabei ist

$$w_2 = B l \frac{d}{2}, \quad (18)$$

die Wandlerkonstante des Wandlers zweiter Art.

Der Leitwert besteht aus der Parallelschaltung eines Wirkleitwertes der Größe

$$G_2 = \frac{r_2}{w_2^2}, \quad (19)$$

eines kapazitiven Leitwertes der Größe

$$\omega C_2 = \omega \frac{J}{w_2^2} \quad (20)$$

und eines induktiven Leitwertes der Größe

$$\frac{1}{\omega L_2} = \frac{1}{\omega \frac{w_2^2}{f_2}}. \quad (21)$$

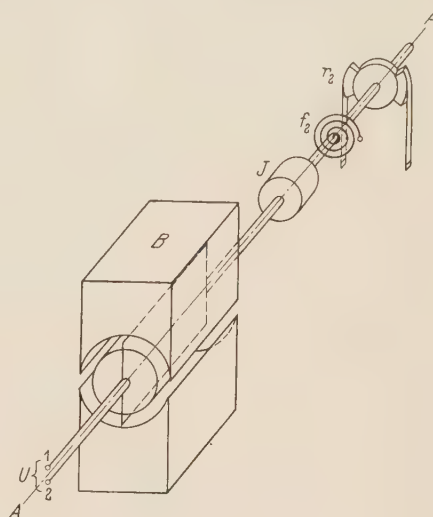


Bild 2. Wandler zweiter Art.



Es wirkt also wiederum auf der elektrischen Seite des Wandlers der reduzierte Reibungskoeffizient wie ein Leitwert, das reduzierte Trägheitsmoment wie eine Kapazität und die reduzierte Federsteife wie der Kehrwert einer Induktivität.

Die hier gezeigten Entsprechungen gelten nicht nur für sinusförmig schwingende Bewegungen, Ströme und Spannungen, sondern ganz allgemein für beliebige Zeitgesetze [1].

Die mechanischen und elektrischen Größen werden in der Praxis oft in folgenden Einheiten gemessen:

Masse $m$	in kg
Federsteife $f_1$	in kp/m
Reibungskoeffizient $r_1$	in kp s/m
Trägheitsmoment $J$	in kp m s <sup>2</sup>
Federsteife $f_2$	in kp m
Reibungskoeffizient $r_2$	in kp m s
Induktion $B$	in V s/m <sup>2</sup>
Länge $l$ und Durchmesser $d$	in m

Dann ergeben sich die Einheiten für die

$$\text{Wandlerkonstante erster Art } w_1 \quad \text{in V s/m}$$

und die

$$\text{Wandlerkonstante zweiter Art } w_2 \quad \text{in V s}.$$

Statt des Trägheitsmomentes wird meist das Schwungmoment  $G D^2$  benutzt<sup>2</sup>. Dabei ist

$$G D^2 = 4 g J$$

mit

$$g = \beta \frac{m}{s^2}.$$

Das Schwungmoment wird gemessen in kp m<sup>2</sup>.

Dabei ist kg die Masseneinheit Kilogramm, kp die Kräfteinheit Kilopond und  $\beta = 9,80665$  exakt, aufgerundet  $\beta \approx 9,81$ .

Benützt man die oben zu den einzelnen Größen angegebenen Einheiten, so erhält man die elektrischen Ersatzgrößen: die Kapazität in Farad, die Selbstinduktion in Henry, den Leitwert in Siemens nach folgenden Zahlenwertgleichungen:

für den Wandler erster Art

$$C_1 = \frac{m}{w_1^2}, \quad (22)$$

$$L_1 = \frac{w_1^2}{f_1} \frac{1}{\beta}, \quad (23)$$

$$G_1 = \frac{r_1}{w_1^2} \beta \quad (24)$$

und für den Wandler zweiter Art

$$C_2 = \frac{J}{w_2^2} \beta = \frac{G D^2}{4 w_2^2}, \quad (25)$$

$$L_2 = \frac{w_2^2}{f_2} \frac{1}{\beta}, \quad (26)$$

$$G_2 = \frac{r_2}{w_2^2} \beta. \quad (27)$$

Die Wandlerkonstanten  $w_1$  und  $w_2$  müssen, da sie Gerätekonstanten sind, von Fall zu Fall ausgemessen oder berechnet werden.

Ein Beispiel für einen elektromagnetisch-mechanischen Energiewandler erster Art ist das Tauchspulsystem eines elektrodynamischen Lautsprechers, während alle Gleichstrom-Nebenschlußmotoren Wandler zweiter Art sind.

<sup>2</sup> Einer allgemeinen Übung folgend ist hier das Schwungmoment mit  $G D^2$  bezeichnet. Dabei ist  $G$  das Gewicht und  $D$  der Trägheitsdurchmesser des betreffenden Körpers. In allen anderen Fällen ist in dieser Arbeit mit  $G$  der elektrische Leitwert gemeint.



## Die Gleichstrom-Nebenschlußmaschine als elektromagnetisch-mechanischer Energiewandler

Für eine Gleichstrom-Nebenschlußmaschine gelten offenbar alle Beziehungen, die für den Wandler zweiter Art abgeleitet wurden. Sieht man von den Nebeneffekten ab, so ist — konstante Erregung vorausgesetzt — das entwickelte Moment  $M$  proportional dem Ankerstrom  $I_A$ , also

$$M = k_1 I_A$$

und die induzierte elektrische Spannung  $U$  ist proportional der Drehzahl  $n$  bzw. der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , also

$$U = k_2 \Omega = k_2 \cdot 2 \pi n ;$$

$k_1$  und  $k_2$  sind gleich groß und haben die Bedeutung der Wandlerkonstanten  $w_2$ . Zur Vereinfachung wird im folgenden bei der Wandlerkonstanten der Index 2 weggelassen:  $w_2 = w$ . Man erhält dann

$$M = w I_A \quad (28)$$

und

$$U = w \Omega . \quad (29)$$

Für einen gegebenen Motor oder Generator läßt sich  $w$  experimentell leicht bestimmen aus

$$w = \frac{U}{\Omega} = \frac{U}{2 \pi n} . \quad (30)$$

Dabei darf allerdings nicht vergessen werden, daß die so gefundene Wandlerkonstante nur für diejenige Induktion  $B$  (also diejenige Erregung) gilt, für die sie gemessen wurde. Die Wandlereigenschaften werden andere, sobald sich die Erregung ändert. Mit ihr ändert sich sozusagen der Maßstab, in dem die mechanischen Größen auf die elektrische Seite abgebildet werden.

### Leerlauf

Der ideal leerlaufende Motor ist ein Energiewandler, der auf der mechanischen Seite nur mit dem Trägheitsmoment (Schwungmoment) seines eigenen Ankers belastet ist. Als elektrische Eingangsklemmen sind die Ankerklemmen anzusehen. An ihnen erscheint das Schwungmoment des Ankers als Kapazität. In Reihe damit liegt der Gesamtwiderstand des Ankerkreises. Man kommt so zu dem Ersatzbild Bild 3. Hier und auch bei den folgenden Ersatzbildern sind rechts der strichpunktierten Linie alle Elemente eingezeichnet, die in Wirklichkeit mechanischer Art sind und durch den Wandler ins elektrische „übersetzt“ werden, während sich links dieser Linie alle elektrischen Elemente befinden. Es ersetzt also  $C_M$  das  $G D^2$  des Ankers,  $R_A$  ist der Ankerkreiswiderstand,  $S$  ein Schalter und  $U_A$  die Spannung der Ankerspannungsquelle.  $U_C$  ist die im Anker des Motors induzierte Spannung. Sie stimmt überein mit der Spannung, auf die sich der Kondensator  $C_M$  auflädt.

Nach Gl. (29) errechnet sich daraus die Drehzahl

$$n = \frac{U_C}{w} \cdot \frac{1}{2 \pi} \quad \text{bzw.} \quad \Omega = \frac{U_C}{w} . \quad (31)$$

$U_C$  ist also in einem anderen Maßstab gleich der Drehzahl. An Hand des Ersatzbildes läßt sich der Leeranlauf des Motors sofort übersehen. Wird der Schalter  $S$  eingelegt, so steigt die Spannung  $U_C$  am Kondensator bekanntlich nach dem Exponentialgesetz

$$U_C = U_A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) , \quad (32)$$

wobei  $t$  die Zeit und  $T = R_A C_M$  ist.  $C_M$  wird aus dem Schwungmoment des Motorankers berechnet nach der Gleichung

$$C_M = \frac{G D^2}{4 w^2} .$$

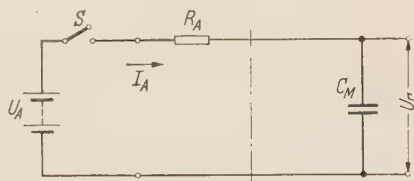


Bild 3. Leerlaufersatzbild.



Damit wird

$$T = R_A C_M = R_A \frac{G D^2}{4 w^2}; \quad (33)$$

$T$  hat die Dimension der Zeit und wird als mechanische Anlaufzeitkonstante bezeichnet.

Der zeitliche Verlauf der Drehzahl folgt aus Gl. (32), wenn man dort beide Seiten mit  $\frac{1}{2\pi w}$  multipliziert und  $U_A \frac{1}{2\pi w} = n_0$  setzt. ( $n_0$  = ideale Leerlaufdrehzahl). Man erhält dann die Drehzahl in Abhängigkeit von der Zeit zu

$$n(t) = n_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (34)$$

Ebenso läßt sich der zeitliche Verlauf des Ankerstroms angeben. Er ist

$$I_A(t) = \frac{U_A}{R_A} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (35)$$

Nach beendetem Anlauf hat sich der Kondensator  $C_M$  im Ersatzbild auf die Spannung  $U_A$  aufgeladen. Die in ihm gespeicherte elektrische Energie ist

$$W_{el} = \frac{1}{2} C_M U_A^2. \quad (36)$$

Die Bewegungsenergie im rotierenden Anker ist

$$W_m = \frac{1}{2} J \Omega^2. \quad (37)$$

Man kann sich durch Einsetzen leicht davon überzeugen, daß die elektrische Energie auf dem Kondensator des Ersatzbildes gleich ist der Bewegungsenergie in der Schwungmasse des Originals.

Während des Anlaufs wird im Ankerkreiswiderstand  $R_A$  die elektrische Energie

$$W_{R_A} = \int_0^\infty R_A I_A^2(t) dt$$

in Wärme umgesetzt,

Mit Gl. (35) wird daraus

$$\left. \begin{aligned} W_{R_A} &= R_A \frac{U_A^2}{R_A^2} \int_0^\infty e^{-2\frac{t}{T}} dt = -\frac{U_A^2}{R_A} \frac{T}{2} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_0^\infty, \\ W_{R_A} &= \frac{1}{2} \frac{U_A^2 \cdot R_A C_M}{R_A} = \frac{1}{2} C_M U_A^2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Ein Vergleich mit Gl. (36) zeigt, daß die während des Anlaufs im Ankerkreiswiderstand in Wärme umgesetzte elektrische Energie dem Betrag nach gleich der in der Schwungmasse gespeicherten Bewegungsenergie ist. Da in Gl. (38) der Ankerkreiswiderstand  $R_A$  nicht mehr vorkommt, hängt das Ergebnis offenbar nicht von ihm ab. Es ist demnach nicht möglich, durch Wahl eines „geeigneten“ Ankerkreiswiderstandes die Verlustenergie zu beeinflussen, vor allem zu reduzieren.

An dieser Tatsache ändert sich auch nichts, wenn zum Anlassen des Motors ein in so feinen Stufen veränderbarer Widerstand verwendet wird, daß der Anker-

strom während des ganzen Anlaufvorganges praktisch konstant bleibt, wie nachstehende Überlegung zeigt (Bild 4).

Bei konstantem, im übrigen beliebigem Ankerstrom  $I_A$  nimmt die Spannung am Kondensator linear mit der Zeit zu nach dem Gesetz

$$U_C = \frac{1}{C_M} I_A t.$$

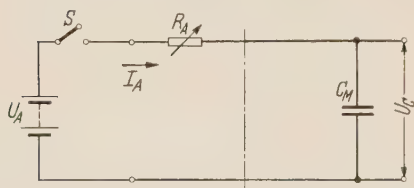


Bild 4. Leeranlauf mit konstantem Ankerstrom, erreicht durch nachgestellten Ankerwiderstand.



Die Anlaufzeit  $t_a$  ergibt sich hierfür aus

$$U_C = U_A = \frac{1}{C_M} I_A t_a$$

zu

$$t_a = \frac{U_A C_M}{I_A}. \quad (39)$$

Damit gemäß Voraussetzung der Anlaufstrom konstant ist, muß  $R_A$  in Abhängigkeit von  $t$  nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit verstellt werden, die sich daraus ergibt, daß der Spannungsabfall über  $R_A$  plus der Spannung am Kondensator  $C_M$  gleich der Spannung der Ankerspannungsquelle  $U_A$  sein muß. Während der Anlaufzeit ist also

$$R_A(t) I_A + \frac{1}{C_M} I_A t = U_A$$

und hieraus

$$R_A(t) = \frac{U_A}{I_A} - \frac{1}{C_M} t.$$

Die im Ankerkreis in Wärme umgesetzte Energie wird damit

$$W_{RA} = \int_0^{t_a} R_A(t) I_A^2 dt = \left( I_A U_A t - \frac{1}{2} \frac{I_A^2}{C_M} t^2 \right) \Big|_0^{t_a}. \quad (40)$$

Setzt man unter Berücksichtigung von Gl. (39) in Gl. (40) die Grenzen ein, so findet man in Übereinstimmung mit Gl. (38)

$$W_{RA} = \frac{1}{2} C_M U_A^2.$$

Diese Verluste sind aber ebenso groß wie sie sich auch bei festem Ankerkreiswiderstand ergeben.

Es sei nun der Fall betrachtet, daß während des Anlaufs nicht der Ankerkreiswiderstand  $R_A$ , sondern die Ankerspannung  $U_A$  so geändert wird, daß der Anlaufstrom bis zum Erreichen der Leerlaufdrehzahl konstant bleibt. (Bild 5). Dieser Fall liegt vor bei Ankerspeisung über einen Leonardgenerator oder einen gittergesteuerten Gleichrichter. Für die Anlaufzeit gilt wieder Gl. (39).

Die Ankerspannung gehorche dem Gesetz

$$U_A(t) = R_A I_A + \frac{1}{C_M} I_A t = I_A \left( R_A + \frac{t}{C_M} \right).$$

Die Anlaufverluste sind mit Gl. (39)

$$\left. \begin{aligned} W_a &= R_A I_A^2 t_a, \\ W_a &= R_A I_A^2 \frac{U_A C_M}{I_A} = R_A I_A U_A C_M. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

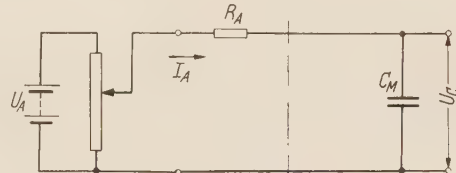


Bild 5. Leeranlauf mit konstantem Ankerstrom, erreicht durch nachgestellte Ankerspannung.

Es zeigt sich, daß im Gegensatz zu den zuvor untersuchten Fällen die Anlaufverluste jetzt vom Ankerkreiswiderstand  $R_A$  und dem Anlaufstrom  $I_A$  abhängen und durch Wahl dieser Größen zu beeinflussen sind.

### Belastung

Die Belastung des Motors ist in erster Linie gegeben durch die anzutreibende Arbeitsmaschine. Das dem Motor abverlangte Moment setzt sich aus folgenden Teilmomenten zusammen:

1. Beschleunigungsmomente, verursacht durch die zu beschleunigenden Massen;
2. Federmomente, z. B. verursacht durch elastische Kupplungen, tordierende Wellen usw.;
3. Momente, die durch die Erdbeschleunigung hervorgerufen werden, z. B. bei allen Hebezeugen; sie sind auch bei Stillstand vorhanden.



4. Momente, die in Reibungs- und Formänderungsarbeit ihre Ursache haben. Sie treten nur während der Bewegung auf und verschwinden im Stillstand. Je nach der Art ihrer Entstehung bzw. der Art der Arbeitsmaschine sind sie in unterschiedlicher Weise von der Drehzahl abhängig. Das bei gleitender Reibung auftretende Moment ist, ausgenommen bei ganz geringen Drehzahlen, praktisch konstant. Linear mit der Drehzahl zunehmende Momente treten auf bei Kalandern und bei Maschinen zum Glätten und Glänzen, während Ventilatoren ein Antriebsmoment verlangen, das quadratisch mit der Drehzahl zunimmt (Ventilatormoment).

Ersatzbilder für belastete Motoren müssen diesen verschiedenartigen Belastungen und den dadurch hervorgerufenen Belastungsmomenten Rechnung tragen. Aus dem Abschnitt „Wandergesetze“ ist zu entnehmen, daß Massen bzw. Trägheitsmomente und Rückstellkräfte durch Kapazitäten und Induktivitäten abzubilden sind. Alle Wirklasten, d. h. solche, bei denen die zugeführte Energie letztlich in Wärme umgesetzt wird, sind durch ohmsche Widerstände darstellbar. Es wurde jedoch gezeigt, daß nur eine linear von der Drehzahl abhängige Wirklast durch einen für alle Drehzahlen gleichen Widerstand ersetzbar ist. Eine drehzahlunabhängige Wirklast oder eine solche mit Ventilatormoment läßt sich zwar auch durch einen Widerstand ersetzen, er muß jedoch für jede Drehzahl einen anderen Wert haben. Für das drehzahlunabhängige Moment wird später noch ein anderes Ersatzbild angegeben.

Die schon im Leerlauf auftretenden Verluste durch Lüftung und Lagerreibung können im Ersatzbild durch einen parallel zum Kondensator  $C_M$  liegenden Widerstand  $R_V$  dargestellt werden. Das Ersatzbild stimmt dann mit Bild 6 überein, wenn dort der Widerstand  $R_L$  mit  $R_V$  bezeichnet wird.

In Bild 6 ist angenommen, die Belastung sei durch einen Querwiderstand  $R_L$  parallel zum Kondensator  $C_M$  wiederzugeben. Er berechnet sich mit Gl. (27) aus der tatsächlichen Belastung. Aus dem Ersatzbild Abb. 6 ist sofort abzulesen, daß sich der Kondensator  $C_M$  im Beharrungszustand nur noch auf die Spannung

$$U_C = U_A \frac{R_L}{R_A + R_L} \quad (42)$$

aufladen kann. Das bedeutet, daß sich bei der Belastung mit  $R_L$  die Belastungsdrehzahl

$$n_L = U_C \frac{1}{w} = \frac{1}{w} U_A \frac{R_L}{R_A + R_L}, \quad n_L = n_0 \frac{R_L}{R_A + R_L} \quad (43)$$

mit

$$n_0 = \frac{U_A}{w}$$

einstellen wird. Vom Kondensator  $C_M$  aus gesehen hat die Ankerspannungsquelle den inneren Widerstand

$$R_A' = \frac{R_A \cdot R_L}{R_A + R_L}.$$

Damit wird die Anlaufzeitkonstante bei Belastung

$$T_L = C_M \frac{R_A}{1 + \frac{R_A}{R_L}}. \quad (44)$$

Sie ist kleiner als die Leerlaufzeitkonstante nach Gl. (33). Demzufolge verringert sich unter sonst gleichen Umständen auch die Anlaufzeit.

Der Anlaufstrom  $I_A$  setzt sich zusammen aus dem Ladestrom  $I_C$  und dem über die Belastung fließenden Strom  $I_L$ . Wird der Schalter  $S$  zur Zeit  $t = 0$  eingelegt, so verläuft der Ladestrom nach der Gleichung

$$I_C = \frac{U_A}{R_A} \cdot e^{-\frac{t}{T_L}}. \quad (45)$$

Mit Gl. (42) ist die Spannung am Kondensator

$$U_C = U_A \frac{R_L}{R_A + R_L} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right),$$

und die Drehzahl ist

$$n_L(t) = n_0 \cdot \frac{R_L}{R_A + R_L} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right). \quad (46)$$

Da der Belastungswiderstand  $R_L$  parallel zum Kondensator  $C_M$  liegt, ist der Strom  $I_L$

$$I_L(t) = \frac{U_C}{R_L} = \frac{U_A}{R_A + R_L} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right).$$

Mit Gl. (45) ergibt sich hieraus dann der gesamte Ankerstrom zu

$$I_A(t) = \frac{U_A}{R_A} e^{-\frac{t}{T_L}} + \frac{U_A}{R_A + R_L} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right). \quad (47)$$

Im einfachsten Fall wird die Belastung eines Motors mit einer Arbeitsmaschine durch eine Kapazität mit parallel geschaltetem Widerstand dargestellt. Das Ersatzbild für einen

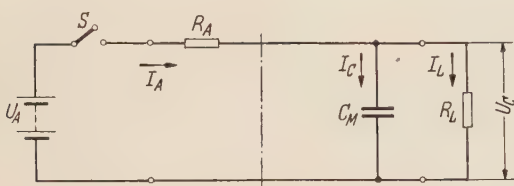


Bild 6. Ersatzbild für Belastung mit Wirklast  
(Belastung proportional der Winkelgeschwindigkeit).

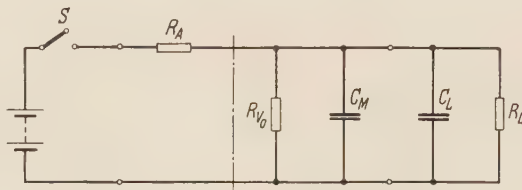


Bild 7. Motor belastet mit Arbeitsmaschine (Ersatzbild).

derart belasteten Motor zeigt Bild 7. Darin bedeutet  $C_L$  das Schwungmoment der Arbeitsmaschine. Für die Berechnung werden  $C_M$  und  $C_L$  in  $C$  sowie  $R_V$  und  $R_L$  in  $R$  zusammengefaßt, womit sich das Ersatzbild zu dem der Abb. 6 vereinfacht.

Wird ein solcher Motor aus einem Gleichrichter mit Glättungsdrossel gespeist, so führt dies zu dem Ersatzbild Bild 8. Man erkennt sofort, daß hier, besonders im Leerlauf, gedämpfte Strom- und Drehzahlschwingungen möglich sind.

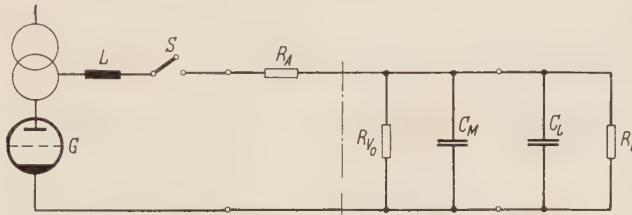


Bild 8. Ersatzbild eines belasteten Motors; Ankerspannung aus Gleichrichter.

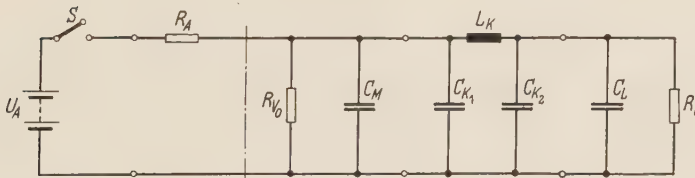


Bild 9. Elastische Kupplung zwischen Motor und Arbeitsmaschine (Ersatzbild).

Auch eine elastische Kupplung zwischen Motor und Arbeitsmaschine kann zu gedämpften Schwingungen führen. Die beiden Kupplungshälften gehen als Kapazitäten  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  in das Ersatzbild ein, die elastische Verbindung zwischen beiden als Induktivität  $L_K$  (s. Bild 9).



Ebenfalls sehr einfach und übersichtlich liegen die Verhältnisse bei Widerstandsbremung über einen Widerstand  $R_B$  (Bild 10). Der Motor habe nach dem Abschalten der Ankerspannungsquelle die Drehzahl  $n$ . Daraus berechnet sich nach Gl. (31) die Ladespannung des

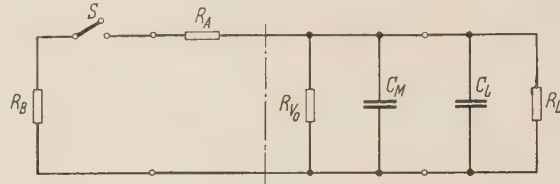


Bild 10. Widerstandsbremung eines belasteten Motors.

Ersatzkondensators  $C = C_M + C_L$  (oder bei Leerlauf  $C = C_M$ ) zu  $U_{Cn}$  Volt. Vernachlässigt man den die Leerlaufverluste darstellenden Widerstand  $R_{V_0}$ , da er gegen  $R_B$  und  $R_L$  groß ist, so entlädt sich der Kondensator über die Parallelschaltung aus  $(R_B + R_A)$  und  $R_L$ , oder bei Leerlauf nur über  $(R_B + R_A)$ . Die Spannung  $U_C(t)$  am Kondensator verläuft dann gemäß

$$U_C(t) = U_{Cn} e^{-\frac{t}{T_L}} \quad (48)$$

mit

$$T_L = (C_M + C_L) \frac{R_L (R_B + R_A)}{R_L + R_B + R_A}$$

bei Belastung und

$$T_0 = C_M (R_B + R_A)$$

bei Leerlauf, also  $C_L = 0$  und  $R_L = \infty$ .

Der Fall der durchziehenden Last (Kran, Aufzug usw.) bedarf einer besonderen Betrachtung. Nach Gl. (12) und Gl. (18) war

$$M = w I. \quad (49)$$

Auf Grund dieser Beziehung kann ein von außen und unabhängig von der Drehzahl auch bei Stillstand wirkendes Moment im Ersatzbild durch einen Strom  $I_L$  ersetzt werden. Er berechnet sich nach Gl. (49) zu

$$I_L = \frac{M_L}{w} \quad (50)$$

und ist für alle Betriebszustände konstant, so lange das durchziehende Lastmoment  $M_L$  konstant bleibt. Damit ergibt sich das Ersatzbild Bild 11. Der Strom  $I_L$  stammt aus einer

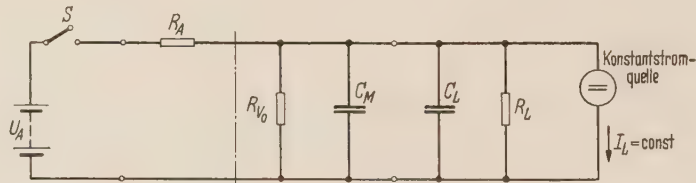


Bild 11. Belastung mit durchziehender Last (Ersatzbild).

Ersatzstromquelle, die unabhängig von der Größe des Außenwiderstandes einen konstanten Strom liefert. Zur Vereinfachung sei angenommen, die beiden Widerstände  $R_{V_0}$  und  $R_L$  seien so groß, daß sie vernachlässigt werden können und die beiden Kapazitäten  $C_M$  und  $C_L$  seien zu  $C$  zusammengefaßt. Bild 11 geht dann in Bild 12 über. Bei offenem Schalter  $S$  lädt sich der Kondensator  $C$  auf die Spannung

$$U_C(t) = \frac{1}{C} I_L t.$$

Das bedeutet aber wegen Gl. (31), daß die Drehzahl  $n$  mit der Zeit linear zunimmt nach der Gleichung

$$n(t) = \frac{1}{w} \frac{1}{C} I_L t \frac{1}{2\pi}$$

und gegen Unendlich strebt.

Eine Drehbewegung wird nicht zustande kommen, d. h. der Kondensator  $C$  (Bild 12) wird sich nicht aufladen, wenn dafür gesorgt wird, daß die Punkte 1 und 2 gleiches Potential haben. Das ist dann der Fall, wenn unter Berücksichtigung der eingetragenen Vorzeichen und der Stromrichtung die Ankerspannung  $U_A$  gleich dem Spannungsabfall ist, den der Strom  $I_L$  über den Widerstand  $R_A$  erzeugt, also

$$U_A - R_A I_L = 0. \quad (51)$$

Bei gegebenen  $I_L$  ist Gl. (51) nur durch entsprechende Wahl von  $U_A$  oder  $R_A$  oder beider zu erfüllen. Die Ankerspannungsquelle wird dabei mit  $I_L$  belastet und die gesamte von ihr abgegebene elektrische Energie im Ankerkreiswiderstand in Wärme umgesetzt.

Ist die Gl. (51) nicht erfüllt, so bleibt ein positiver oder negativer Spannungsrest, auf den sich der Kondensator auflädt. Das bedeutet, daß sich der Motor mit entsprechender, jetzt konstanter Geschwindigkeit dreht.

Wird die eben beschriebene Anordnung generatorisch über einen Widerstand  $R_B$  gebremst oder, was dasselbe ist, liegt eine zusätzliche Belastung vor, die im Ersatzbild durch einen Widerstand parallel zum Kondensator dargestellt werden kann, so erhält man Bild 13. Der

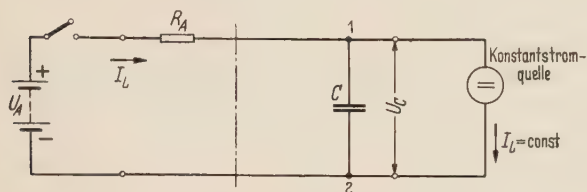


Bild 12. Belastung mit durchziehender Last (vereinfachtes Ersatzbild).

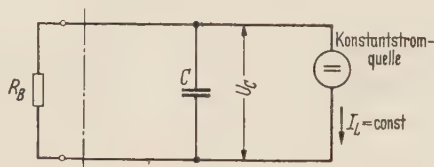


Bild 13. Widerstandsbremsung bei durchziehender Last (Ersatzbild).

konstante Strom  $I_L$  erzeugt über den Widerstand  $R_B$  den konstanten Spannungsabfall  $R_B I_L$ , so daß die Ladespannung des Kondensators

$$U_C = R_B I_L$$

wird. Das bedeutet, daß sich eine konstante Drehzahl

$$n = R_B I_L \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

einstellt. Sie ist bei gegebenem  $I_L$  um so kleiner, je kleiner  $R_B$  gewählt wird.

Es gibt Belastungsmomente, die in weiten Grenzen von der Drehzahl unabhängig sind, bei Stillstand jedoch verschwinden. Solche Belastungen lassen sich im Ersatzbild (Bild 14)

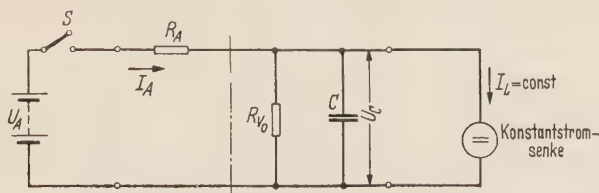


Bild 14. Drehzahlunabhängiges Belastungsmoment (Ersatzbild).

durch eine Konstantstromsenke darstellen. Darunter sei ein Verbraucher (Stromsenke) verstanden, der unabhängig von der außen anliegenden Spannung einen konstanten Strom  $I_L$  aufnimmt. Er berechnet sich nach dem Lastmoment  $M_L$  nach Gl. (28).

Da der Strom  $I_L$  voraussetzungsgemäß für alle Betriebszustände (Stillstand ausgenommen) konstant ist, erzeugt er über den Ankerkreiswiderstand  $R_A$  den konstanten Spannungsabfall  $R_A I_L$ , der von der Ankerspannung  $U_A$  in Abzug zu bringen ist.  $I_L$  kann somit dadurch berücksichtigt werden, daß an Stelle der wirklichen Ankerspannung  $U_A$  mit der reduzierten Ankerspannung

$$U'_A = U_A - R_A I_L$$



gerechnet wird. Für den Anlauf gelten dann die Gl. (31), (32) usw., wenn man dort  $U_A$  durch  $U'_A$  ersetzt. Der Ankerstrom setzt sich aus zwei Komponenten zusammen und anstatt Gl. (35) erhält man für ihn

$$I_A = \frac{U'_A}{R_A} e^{-\frac{t}{T}} + I_L. \quad (52)$$

#### Laststöße

Es werde der Fall betrachtet, daß ein leerlaufender Antrieb plötzlich belastet wird (Bild 15). Die Belastung bestehe nur aus Wirklast, sie kann also im Ersatzbild durch einen Widerstand

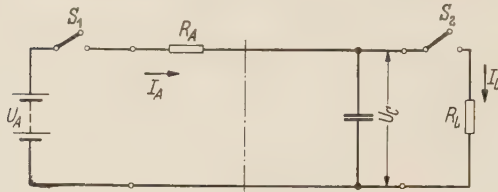


Bild 15. Stoßartige Belastung (Ersatzbild).

$R_L$  dargestellt werden. Die Leerlaufverluste seien in  $R_L$  ebenfalls enthalten. Vor dem Zuschalten der Last war die Spannung am Kondensator  $U_C = U_A$ . Nach dem Zuschalten und nach Abklingen des Ausgleichsvorganges ist sie

$$U_C = U_A \frac{R_L}{R_A + R_L}.$$

Während des Ausgleichsvorganges wird sich der Kondensator auf diese Spannung entladen und zwar über die Parallelschaltung der beiden Widerstände  $R_A$  und  $R_L$ . Die Zeitkonstante  $T$  für den Entladevorgang ist demnach

$$T = C \frac{R_A R_L}{R_A + R_L}$$

und die Spannungsänderung am Kondensator ist dem Betrag nach

$$\Delta U_C = U_A \frac{R_A}{R_A + R_L}.$$

Der zeitliche Verlauf ist exponentiell, man kann also schreiben

$$\Delta U_C(t) = U_A \frac{R_A}{R_A + R_L} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Mit Gl. (31) erhält man daraus den Drehzahlverlauf

$$n(t) = n_0 \frac{R_L}{R_A + R_L} \left( 1 + \frac{R_A}{R_L} e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (53)$$

Der Laststrom ergibt sich zu

$$I_L(t) = \frac{U_C(t)}{R_L} = U_A \frac{1}{R_A + R_L} \left( 1 + \frac{R_A}{R_L} e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (54)$$

Im Einschaltaugenblick (also für  $t = 0$ ) springt er auf den Wert

$$I_L(0) = \frac{U_A}{R_L},$$

fällt während des Ausgleichsvorganges ab und erreicht für  $t = \infty$  den Wert

$$I_L(\infty) = \frac{U_A}{R_A + R_L}.$$

Der aus der Ankerspannungsquelle fließende Strom  $I_A$  ist bestimmt durch die Differenz zwischen Ankerspannung  $U_A$  und Kondensatorspannung  $U_C$ , sowie den Widerstand  $R_A$ . Er ist

$$\left. \begin{aligned} I_A(t) &= \frac{1}{R_A} U_A \left[ 1 - \frac{R_L}{R_A + R_L} \left( 1 + \frac{R_A}{R_L} e^{-\frac{t}{T}} \right) \right], \\ I_A(t) &= \frac{U_A}{R_A + R_L} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Man findet: Der durch das plötzliche Zuschalten der Last entstehende Momentenstoß wird durch die Anwesenheit des Energiespeichers (Schwungrad, im Ersatzbild Kondensator) in seiner Wirkung auf das speisende Netz (Ankerspannungsquelle) gemildert. Während das

Lastmoment von Null ausgehend steil anspringt, um dann exponentiell auf den etwas kleineren Beharrungswert abzusinken, steigt der Ankerstrom exponentiell auf den dem Beharrungsmoment entsprechenden Wert an. Die Zeitkonstante des Anstiegs ist dabei abhängig von der Größe des Energiespeichers und somit in gewissen Grenzen beliebig wählbar. Ohne Energiespeicher hätte sich der Laststrom ungemindert auf die Stromquelle ausgewirkt.

Bei gewissen Antrieben (z. B. Blockstraßen mit Reversierantrieb) kann der tatsächliche Verlauf der Belastung durch periodisch auftretende Laststöße angenähert werden. Solche Laststöße ergeben rechteckförmige Momentenkurven. Der zeitliche Verlauf der Ströme setzt sich dann aus Exponentialkurven zusammen, die sich nach Fourier zerlegen lassen. Nachstehend sei berechnet, wie weit die so gewonnene Grundwelle des Ankerstromes durch die Anwesenheit des Energiespeichers gedämpft wird und mit welchem Bruchteil des ursprünglichen Betrages sie auf der Netzseite noch in Erscheinung tritt. In Bild 16 ist das Problem durch die Annahme nachgebildet, daß in Reihe mit dem Belastungswiderstand  $R_L$  eine Spannungsquelle mit periodisch veränderlicher Spannung

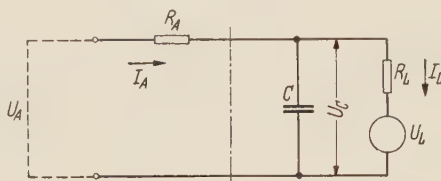


Bild 16. Periodisch auftretende Laststöße (Ersatzbild).

$$U_L = U_{L_0} \sin \omega t$$

liegt. Auch der Strom  $I_L$  ändert sich dann periodisch. Die Ankerspannungsquelle habe den inneren Widerstand Null und kann daher für die folgende Betrachtung durch einen Kurzschluß ersetzt werden. Von der Spannungsquelle  $U_L$  aus gesehen hat das System den Widerstand

$$\Re_L = R_L + \frac{R_A \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_A + \frac{1}{j\omega C}} = R_L + \frac{R_A}{1 + j\omega C R_A}.$$

Der Strom  $I_L$  hat daher die Größe

$$I_L = \frac{U_L}{\Re_L}. \quad (56)$$

Die Spannung am Kondensator ist

$$U_C = U_L \left( 1 - \frac{R_L}{\Re_L} \right). \quad (57)$$

Der Strom  $I_A$  fließt über den Widerstand  $R_A$ . Es ist

$$I_A = \frac{U_C}{R_A}. \quad (58)$$

Aus Gl. (56) und Gl. (58) findet man mit Gl. (57)

$$\frac{I_A}{I_L} = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad \text{mit} \quad T = R_A C \quad (59)$$

und

$$\left| \frac{I_A}{I_L} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

In Bild 17 ist  $\left| \frac{I_A}{I_L} \right|$  über  $\omega T$  aufgetragen. Man erkennt, wie sich mit zunehmender Zeitkonstante  $T$  die Lastschwankungen immer weniger durch Stromschwankungen auf der Netzseite bemerkbar machen. Bei  $\omega T = 3,2$  sind sie auf etwa 30% des Wertes ohne Energiespeicher zurückgegangen.

Ist die Grundfrequenz der Lastschwankungen bekannt, so läßt sich aus Bild 17 entnehmen, bei welcher Zeitkonstanten die durch die Belastungsstöße hervorgerufenen Belastungsschwankungen im Netz auf einen gewünschten Bruchteil zurückgehen. Man erkennt aber auch, daß die praktische Grenze bei  $\omega T = 4 \dots 6$  liegen dürfte.

#### Bestimmung von $R_A$ und $R_L$ (Bild 18)

In den Listen der Gleichstrommaschinen findet man Angaben über die Nenndrehzahl  $n_L$  in Upm, die Ankerspannung  $U_A$ , die bei Nenndrehzahl abgebbare Leistung  $N_N$  und den



Wirkungsgrad  $\eta$ . (Ohne Berücksichtigung der Erregerleistung). Auch das Schwungmoment ( $G D^2$ ) ist angegeben. Im stationären Zustand ist die Nutzleistung

$$N_N = R_L I_A^2$$

und die Verlustleistung

$$N_V = R_A I_A^2$$

daraus

$$\eta = \frac{N_N}{N_V + N_N} = \frac{R_L}{R_A + R_L} \quad (60)$$

Die aus dem Netz aufgenommene Ankerleistung  $N$  ist

$$N = \frac{N_N}{\eta} = \frac{U_A^2}{R_A \cdot R_L}$$

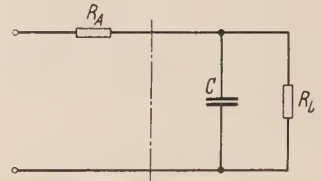
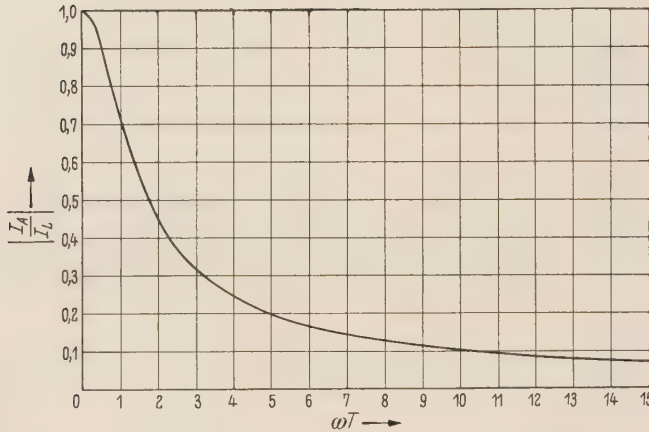


Bild 18. Ersatzbild zur Bestimmung von Ankerwiderstand  $R_A$  und Ersatz-Lastwiderstand  $R_L$ .

Bild 17. Dämpfende Wirkung eines Energiespeichers bei periodischen Laststößen.

Hieraus erhält man mit Gl. (60) den für Nennlast und Nenndrehzahl gültigen Ersatz-Lastwiderstand

$$R_L = \frac{U_A^2 \cdot \eta^2}{N_N} \quad (61)$$

und den Ersatz-Ankerwiderstand

$$R_A = \frac{U_A^2}{N_N} \eta (1 - \eta) \quad (62)$$

Hier ist unter  $R_A$  der reine Ankerwiderstand zu verstehen ohne sonstige im Ankerkreis liegende Widerstände. Aus Gl. (60) folgt mit

$$\frac{U_{C\text{ Last}}}{U_A} = \frac{R_L}{R_A + R_L}$$

daß

$$\frac{U_{C\text{ Last}}}{U_A} = \eta \quad \text{und} \quad U_A = \frac{U_{C\text{ Last}}}{\eta}$$

ist. Aus Gl. (31) findet man dann

$$w = U_A \cdot \eta \frac{1}{\Omega_L} = U_A \eta \frac{60}{2 \pi n_L} \quad (63)$$

mit

$$\Omega_L = 2 \pi \frac{n_L}{60};$$

unter  $\Omega_L$  ist diejenige Winkelgeschwindigkeit zu verstehen, bei der mit einem Wirkungsgrad von  $\eta$  an der Welle eine Nutzleistung von  $N_N$  Watt abgegeben wird.

### Frequenzgänge

Die Gleichstrom-Nebenschlußmaschinen stellen den weitaus größten Teil der geregelten Antriebe. Zur Vorausberechnung eines Regelkreises ist die Kenntnis des Frequenzganges jedes einzelnen Gliedes unerlässlich. Aus den im vorhergehenden Abschnitt gezeigten Ersatzbildern lassen sich die Frequenzgänge für den leerlaufenden und auch für den belasteten

Gleichstrom-Nebenschlußmotor leicht herleiten. Von Interesse für die Regelung sind zumeist die Beziehungen

$$n = f(U_A), \quad (64)$$

$$I_A = f(U_A), \quad (65)$$

$$n = f(I_A). \quad (66)$$

Geht man aus vom Ersatzbild für den leerlaufenden Motor (Bild 3), so ist dort die Drehzahl nach Gl. (31) durch die Spannung  $U_C$  am Kondensator ersetzt, und an Stelle Gl. (64) interessiert

$$U_C = f(U_A). \quad (67)$$

Der Frequenzgang  $F$  eines Regelkreises ist definiert als Quotient aus seiner Ausgangsgröße und seiner Eingangsgröße. Als Ausgangsgrößen können hier auftreten  $I_A$  und  $U_C$ , als Eingangsgrößen  $U_A$  und  $I_A$ . Man erhält somit die drei möglichen Frequenzgänge

$$F_1 = \frac{U_C}{U_A}, \quad (68a)$$

$$F_2 = \frac{U_C}{I_A}, \quad (68b)$$

$$F_3 = \frac{I_A}{U_A}. \quad (68c)$$

Aus Bild 3 ist für den leerlaufenden Motor abzulesen:

$$F_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_A C} = \frac{1}{1 + p T}, \quad (69a)$$

$$F_2 = \frac{1}{p C}, \quad (69b)$$

$$F_3 = \frac{1}{1 + p T}, \quad (69c)$$

mit

$$p = j\omega \quad \text{und} \quad T = R_A C.$$

Für den belasteten Motor nach Bild 6 findet man entsprechend

$$F_1 = \frac{R_L}{R_A + R_L} \cdot \frac{1}{1 + p T_1}, \quad (70a)$$

$$F_2 = R_L \cdot \frac{1}{1 + p T_2}, \quad (70b)$$

$$F_3 = \frac{1}{R_A + R_L} \cdot \frac{1 + p T_2}{1 + p T_1}, \quad (70c)$$

mit

$$T_1 = \frac{R_A R_L}{R_A + R_L} \quad \text{und} \quad T_2 = R_L C.$$

Für den Motor mit Induktivität im Ankerkreis nach Bild 19 ist

$$F_1 = \frac{R_L}{R_A + R_L} \frac{1}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2}, \quad (71a)$$

$$F_2 = \frac{R_L}{1 + p T_a}, \quad (71b)$$

$$F_3 = \frac{1}{R_A + R_L} \frac{1 + p T_a}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2}, \quad (71c)$$

mit

$$T_a = R_L C \quad \text{und} \quad T_b = \frac{L}{R_A}$$

und

$$T_1 = \frac{R_A}{R_A + R_L} (T_a + T_b),$$

$$T_2^2 = \frac{R_A}{R_A + R_L} T_a \cdot T_b.$$

Die Reihe ließe sich mit den verschiedensten Belastungen beliebig fortsetzen, doch mögen diese drei prinzipiellen Beispiele genügen.

Auf einen wichtigen Punkt muß noch hingewiesen werden. Zur Herleitung der Frequenzgänge war von den Ersatzbildern ausgegangen worden, die an Stelle der in Wirklichkeit vor-



handenen mechanischen Last die elektrischen Elemente Kapazität, Induktivität und Widerstand enthalten. Es wurde einleitend gezeigt, in welcher Weise die Umrechnung vorzunehmen ist und welche Rolle dabei die Wandlerkonstante spielt. Sie enthält (s. Gl. (18)) die Induktion  $B$ , die von der Erregung der elektrischen Maschine abhängt. Mit der Erregung ändert  $w$  seinen Wert und damit alle in den Ersatzbildern rechts der strichpunktuierten Linie eingezeichneten Elemente, während die links davon befindlichen unverändert bleiben. Hieraus folgt die wichtige Erkenntnis, daß sich die Zeitkonstanten und die vor den Frequenzgängen stehenden konstanten Faktoren ebenfalls ändern, somit letztlich aber auch die Frequenzgänge selbst. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß ein ursprünglich stabiler Regelkreis instabil wird, wenn sich die Erregung eines in ihm enthaltenen Nebenschlußmotors ändert. Zumindest wird er ein anderes Regelverhalten zeigen.

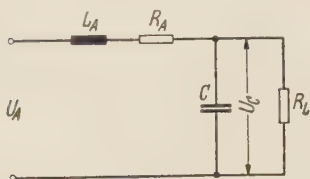


Bild 19. Ersatzbild für belasteten Motor mit Induktivität im Ankerkreis.

### Zusammenfassung

Die für elektromagnetisch-mechanische Energiewandler erster und zweiter Art gültigen Wandlergesetze werden abgeleitet, wobei sich ergibt, daß eine Masse bzw. ein Trägheitsmoment in eine Kapazität, eine wegproportionale Rückstellkraft in eine Induktivität und eine geschwindigkeitsabhängige Reibung in einen Leitwert übergehen<sup>3</sup>.

Die Reduktion der mechanischen Größen auf die elektrische Seite des Wandlers und umgekehrt erfolgt dabei nach Maßgabe einer von den mechanischen und elektrischen Eigenschaften des Wandlers abhängigen Gerätekonstanten, der Wandlerkonstanten  $w$ . Sie kommt in den Formeln nur in der zweiten Potenz vor und findet ihre Parallele im Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  eines Transformators, denn auch dort übersetzen sich Widerstände mit  $\ddot{u}^2$  von der einen auf die andere Seite.

Anschließend wird als einer der markantesten Vertreter der Wandler zweiter Art der Gleichstrom-Nebenschlußmotor in seinem Verhalten unter den verschiedensten Betriebsbedingungen betrachtet. Mit Hilfe der sich durch die Wandler ergebenden Ersatzbilder für Motor und Belastung werden die Anlaufverhältnisse und die Rückwirkung der mechanischen Belastung auf das speisende Netz untersucht.

Schließlich wird gezeigt, wie die bei der Berechnung von Regelvorgängen erforderlichen Frequenzgänge des leerlaufenden und belasteten Motors aus den Ersatzbildern gewonnen werden können.

### Literatur

- [1] KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. — [2] SCHWENKHAGEN, H. F.: Allgemeine Wechselstromlehre; Bd. I. — [3] WALLOT, J.: Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik. — [4] HECHT, H.: Die elektroakustischen Wandler. — [5] HECHT, H.: Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. — [6] FISCHER, F. A.: Grundzüge der Elektroakustik. — [7] VAN SANTEN, G. W.: Einführung in das Gebiet der mechanischen Schwingungen. — [8] HÄHNLE, W.: Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder. Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern Bd. 11 (1931) S. 1—13. — [9] FISCHER, F. A.: Reziprozitätsbeziehungen der elektroakustischen Wandler und deren universelle elektrische Ersatzbilder. AEÜ Bd. 5 (1951) S. 382—384. — [10] JOHN, U.: Lineare elektromechanische Vierpole. Frequenz Bd. 5 (1951) S. 166—173 u. S. 190—192. — [11] FISCHER, F. A.: Über die verschiedenen Darstellungen der elektroakustischen Wandler. AEÜ Bd. 7 (1953) S. 569—574. — [12] FELDTKELLER, R., u. W. NONNENMACHER: Einheitliche elektrische Ersatzbilder für elektroakustische Wandler. AEÜ Bd. 8 (1954) S. 191—196. — [13] REICHARDT, W., u. A. LENK: Die Vierpolersatzschaltbilder der elektromechanischen Wandler. Acustica Bd. 5 (1955) S. 1—6.

Professor Dr.-Ing. S. NAHRGANG, Technische Hochschule Karlsruhe, Kaiserstraße 12, Lehrstuhl für Grundlagen der Elektrotechnik und Regelungstechnik

<sup>3</sup> Führt man die gleiche Rechnung für einen elektrostatisch-mechanischen Energiewandler durch, so findet man, daß im Gegensatz zum elektromagnetisch-mechanischen Energiewandler eine Masse bzw. ein Trägheitsmoment in eine Induktivität, eine wegproportionale Rückstellkraft in eine Kapazität und eine geschwindigkeitsabhängige Reibung in einen Widerstand übergehen.

## Die $H_{0n}$ -Welle im kreisförmigen Hohlleiter mit äquidistant und koaxial angeordneten bandförmigen Ringen vollkommener Leitfähigkeit

Von

HERBERT BUCHHOLZ, Darmstadt

Mit 3 Textabbildungen

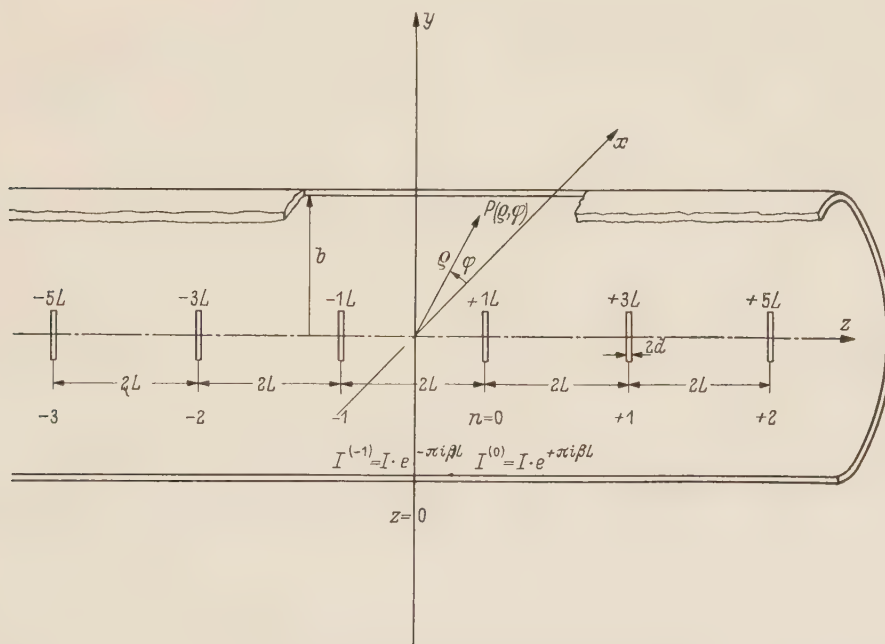
(Eingegangen am 5. Januar 1960)

**Übersicht.** In der Arbeit wird der Einfluß einer periodischen Struktur innerhalb eines vollkommen leitenden Hohlleiters von kreisförmigem Querschnitt untersucht, der  $H_{0n}$ -Wellen führt. Diese periodische Struktur besteht in einer zur Hohlleiterachse coaxialen und äquidistanten Anordnung von vollkommen leitenden, bandförmigen Ringen, die in Richtung der Achse sehr schmal sind, so daß die Ströme in der Oberfläche dieser Ringe als phasengleich angesehen werden können. Von Ring zu Ring besteht natürlich zwischen diesen Strömen eine Phasenverschiebung, die zunächst noch unbekannt ist. Für die Größe dieser Phasenverschiebung wird im Abschnitt 5 eine Beziehung aufgestellt, die ihre numerische Berechnung ermöglicht.

Die in der Arbeit hergeleitete Lösung hat nur Näherungscharakter. Er offenbart sich darin, daß das Verschwinden der Feldkomponente  $E_\varphi$  anstatt auf der ganzen Breite  $2d$  der bandförmigen Ringe nur auf ihren beiden äußeren Randkurven angestrebt wird.

## 1. Die Voraussetzungen der Aufgabe

Im Inneren des beiderseits unendlich langen, glatten und vollkommen leitenden Hohlleiters vom Durchmesser  $2b$  cm seien in dem immer gleichen, längs der Achse gemessenen Abstand  $2L$  cm unzählig viele, sehr schmale Ringe mit dem Durchmesser  $2a < 2b$  cm so aufgehängt, daß immer die innere Achse der Ringe mit der Hohlleiterachse zusammenfällt. Gemäß Abb. 1 stelle sie zugleich die  $z$ -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems mit



**Bild 1.** Der Blick in das Innere des Hohlleiters zeigt die Anordnung der unendlich gut leitenden, bandförmigen Ringe im Abstand  $2L$  und von der Breite  $2d \ll 2L$ .

den drei Koordinaten  $\varrho, \varphi, z$  und den drei ihnen zugeordneten Einheitsvektoren  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$  in den Richtungen zunehmender Werte von  $\varrho$  oder  $\varphi$  oder  $z$  dar. Die Ringe mögen aus vollkommen leitenden Bändern bestehen, die in Richtung  $\mathfrak{z}_1$  von vernachlässigbarer Dicke sind.



Die in Richtung  $\mathfrak{z}_3$  genommene Breite der Bänder betrage  $2d$  cm, und es sei  $d \ll a$  und natürlich auch  $d \ll L$ . Die zur  $z$ -Achse senkrechten Mittelebenen der Ringe mögen die Gleichungen

$$z = z_n = (2n + 1) \cdot L \quad (1)$$

haben mit  $n = \dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots$ . Bei der praktischen Ausführung ist in erster Linie an den Fall  $a \approx b$  gedacht. In den hier aufgestellten Formeln ist jedoch die relative Größe von  $a$  zu  $b$  im Rahmen der Bedingung  $b > a$  willkürlich wählbar.

Durch den so veränderten Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt bewege sich eine  $H_{0n}$ -Welle mit  $n = 1, 2, 3 \dots$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathfrak{z}_3$  hindurch. Sie werde von einer hier nicht weiter interessierenden Hochfrequenzquelle erregt, die in Richtung auf  $z \rightarrow -\infty$  aufgestellt zu denken ist. Bei Nichtvorhandensein der metallischen Ringe in den Ebenen  $z = z_n$  bestehen dann für die drei Komponenten  $H_z, H_\varrho, E_\varphi$  bekanntlich die folgenden drei Beziehungen:

$$H_z(\varrho, z; t) = H_{0n} \cdot J_0\left(\frac{\varrho}{b} j'_{0n}\right) \cdot e^{-i(\omega t - 2\pi \cdot z/\lambda_H^{(n)})} \quad [H_{0n}] = \text{A/cm}, \quad (1a)$$

$$H_\varrho(\varrho, z; t) = H_{0n} \cdot i \cdot \frac{\lambda_g'^{(n)}}{\lambda_H^{(n)}} \cdot J_0'\left(\frac{\varrho}{b} j'_{0n}\right) \cdot e^{-i(\omega t - 2\pi \cdot z/\lambda_H^{(n)})} \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (1b)$$

$$E_\varphi(\varrho, z; t) = -i \cdot H_{0n} \cdot \frac{\lambda_g'^{(n)}}{\lambda_0} \cdot J_0'\left(\frac{\varrho}{b} j'_{0n}\right) \cdot e^{-i(\omega t - 2\pi \cdot z/\lambda_H^{(n)})} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad [E_\varphi] = \text{V/cm}, \quad (1c)$$

$$(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{H/cm}, \quad \epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{-11} \text{F/cm}, \quad \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \text{ Ohm})$$

und hierin ist mit  $\omega = 2\pi f$  und  $f \cdot \lambda_0 = c_0 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \text{ cm/s}$

$$J_0'(j'_{0n}) = -J_1(j'_{0n}) \equiv -J_1(j'_{1n}) = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_g'^{(n)} = 2\pi b/j'_{0n}, \quad (2a)$$

$$\lambda_H^{(0,n)} = \lambda_0 \cdot (1 - (\lambda_0/\lambda_g'^{(n)})^2)^{-1/2} \quad (2b)$$

mit  $\lambda_g'^{(n)} \equiv \lambda_g^{(0,n)}$  als der Grenzwellenlänge der  $H_{0n}$ -Welle und mit  $\lambda_H^{(0,n)} \equiv \lambda_H^{(n)}$  als der zu diesem Wellen-Mode gehörenden Wellenlänge im Hohlleiter, beide in cm gemessen.

Diese Hohlleiterwelle würde durch einen einzelnen Ring vom Radius  $a$ , der etwa in der Ebene  $z = z_n$  steht, den magnetischen Wechselfluß  $\Psi(a, z_n; t)$  von der Größe

$$\begin{aligned} \Psi(a, z_n; t) &= 2\pi \cdot \mu_0 \cdot \int_0^a H_z(\varrho; z_n; t) \cdot \varrho \cdot d\varrho = -\omega \lambda_0 \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \lambda_g^{(0,n)}/\lambda_0 \cdot H_{0n} \cdot J_0'\left(\frac{a}{b} j'_{0n}\right) \\ &\times e^{-i(\omega t - 2\pi \cdot z_n/\lambda_H^{(n)})} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \end{aligned} \quad (3)$$

hindurchschicken. Daraus folgt dann wegen  $\omega \lambda_0 = 2\pi \cdot c_0 = 2\pi/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  für die im Ring  $z = z_n$  durch diesen Fluß induzierte Spannung der Ausdruck:

$$+ i \omega \cdot \Psi(a, z_n; t) \equiv 2\pi a \cdot E_\varphi(a; z_n; t). \quad (4)$$

Sie entspricht der Größe nach dem über dem ganzen Umfang des Ringes genommenen Linienintegral von  $E_\varphi(a, z_n; t)$ , wie es sein muß, und sie hat natürlich einen Strom im Ring zur Folge. Offenbar ist dann aber auch umgekehrt ein Strom in einem solchen Ringe die geeignete Anregungsart für das oben behandelte Feld.

Dieses axialsymmetrische und also von  $\varphi$  unabhängige Hohlleiterfeld der Gl. (1a, b, c) läßt sich aber auch einheitlich durch die  $z$ -Komponente  $P_z(\varrho, z)$  eines Hertzschen Vektors gemäß den folgenden Gleichungen

$$E_\varphi(\varrho, z) = -i \omega \mu_0 \cdot \frac{\partial P_z(\varrho, z)}{\partial \varrho}, \quad (5a)$$

$$H_\varrho(\varrho, z) = \frac{\partial^2 P_z(\varrho, z)}{\partial \varrho \cdot \partial z}, \quad (5b)$$

$$H_z(\varrho, z) = \frac{\partial^2 P_z(\varrho, z)}{\partial z^2} + k_0^2 \cdot P_z(\varrho, z) = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot P_z(\varrho, z)) \quad (5c)$$

darstellen, so daß nach der letzten von ihnen die Hilfsgröße  $P_z(\varrho, z)$  außerdem, wie es sein muß, der Wellengleichung

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot P_z(\varrho, z)) + \frac{\partial^2 P_z(\varrho, z)}{\partial z^2} + k_0^2 \cdot P_z(\varrho, z) = 0 \quad (5)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad [k_0] = \text{cm}^{-1} \quad (5')$$

in Zylinderkoordinaten genügt.

Bei den unendlich vielen Ringen der Abb. 1 werden natürlich in jedem der Ringe in der Regel zum mindesten der Phase nach verschiedene Ströme  $I^{(n)}$  induziert und jeder dieser unzählig vielen Ringströme ruft Hohlleiterwellen hervor, die sich in beiden Richtungen der  $z$ -Achse ausbreiten. Dadurch wird das Hohlleiterfeld von Gl. (1) teilweise modifiziert, denn es wird für die aus den einzelnen Ringen heraustretenden Wellen einmal einen Unterschied ausmachen, in welchem Schwingungszustand sie nach dem Durchlaufen des Abstandes  $2L$  zweier Ringe auf die dem Nachbarring entstammenden Wellen auftreffen, und möglicherweise wird auch die Laufzeit der Welle von einem Ringe zum nächsten nicht unbedingt der Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Welle in demselben Hohlleiter ohne die Ringe zu entsprechen brauchen. Wohl aber ist nach dem Theorem von FLOQUET [5] der Unterschied in der Phasenlage der Ströme in zwei benachbarten Ringen an allen Stellen der gleiche. Da es im eingeschwungenen Zustand des resultierenden Wellenspiels innerhalb des Hohlleiters nicht mehr möglich ist, die primäre Welle gemäß Gl. (1) von den durch die aufeinander folgenden Ringe erzeugten Teilwellen zu trennen, so empfiehlt es sich weiterhin, nicht länger nach der primären und den angeregten Wellen zu unterscheiden, sondern von einem einheitlichen Wellenzug auszugehen. An die Stelle der unbekannt bleibenden Amplitude der primären Welle tritt jetzt besser als Ausgangsgröße der unbekannt bleibende Strom  $I^{(n)}$  im  $n$ -ten Ring mit  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Diese Vereinbarung kommt nach dem schon oben erwähnten Theorem von FLOQUET [5] in der Tat auf die willkürliche Wahl nur eines einzelnen dieser unzählig vielen Ströme hinaus, nämlich etwa auf die des Stromes  $I$ , denn es kann nach diesem Theorem in Hinblick auf die Abb. 1 stets gesetzt werden:

$$I^{(n)} = I \cdot e^{+\pi i (2n+1) \cdot \beta L} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots; \quad [\beta] = 1/\text{cm} \quad (6)$$

und  $I$  bleibt hierin weiterhin unbekannt. Hingegen muß der eben eingeführte, aber seinem Wert nach noch nicht angebbare Parameter  $\beta$  später aus der zusätzlichen Forderung bestimmt werden, daß etwa in der rechten und linken Randkurve der unzählig vielen, vollkommen leitenden Ringe, d. h. also für  $\varrho = a$  und für alle  $z = z_n \pm d$ , die Komponente  $E_\varphi = 0$  wird. Die Ströme  $I^{(n)}$  selbst sind zunächst als lineare Ströme zu denken, die nur in der Mittelebene der Ringe fließen.

## 2. Das Strahlungsfeld der unbegrenzten Folge von Stromringen an den Stellen $z = z_n$

Für den an der Stelle  $z = z_n$  stehenden einzelnen Stromring mit dem Strom  $I^{(n)}$  und mit dem Ringdurchmesser  $a$  berechnet sich nun bekanntlich der Hilfsvektor  $\partial P_z^{(pr)}(\varrho, z; z_n)/dz$  nach der Formel

$$\begin{aligned} \partial P_z^{(pr)}(\varrho, z; z_n)/\partial \varrho &= E_\varphi^{(pr)}(\varrho, z; z_n)/(-i\omega\mu_0) = -a \cdot I \cdot e^{+\pi i (2n+1) \cdot \beta L} / 4\pi \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\omega_0 R} / R \cdot \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\alpha \\ &= -a I / 2\pi^2 \cdot e^{+\pi i (2n+1) \cdot \beta L} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\alpha - \varphi) \left( \int_0^\infty \cos(z - z_n) t \cdot K_0(\Omega \cdot \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot dt \right) \cdot d\alpha \\ &= -a I / 4\pi^2 \cdot e^{+\pi i (2n+1) \cdot \beta L} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\alpha - \varphi) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i \cdot (z - z_n) \cdot t} K_0(\Omega \cdot \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot dt \right) \cdot d\alpha, \quad (1) \end{aligned}$$

$$(R^2 = \Omega^2 + (z - z_n)^2; \quad \Omega^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cdot \cos(\alpha - \varphi); \quad z_n = (2n + 1)L; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$



Wegen

$$K_0(\Omega \cdot s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda (\alpha - \varphi)}{1 + \delta_0 \lambda} \cdot \begin{cases} K_\lambda(a s) \cdot I_\lambda(\varrho s) & (a > \varrho) \\ K_\lambda(\varrho s) \cdot I_\lambda(a s) & (a < \varrho) \end{cases} \quad (2)$$

ist aber

$$\int_0^{2\pi} K_0(s \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos(\alpha - \varphi)}) \cdot \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\alpha = \pi \cdot \begin{cases} (+) K_1(a s) \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} I_0(\varrho s)/s & (a > \varrho) \\ (-) I_1(a s) \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} K_0(\varrho s)/s & (a < \varrho) \end{cases} \quad (3)$$

und die erste und zweite Zeile dieser Gleichung entspricht den gleichen Fallunterscheidungen wie in Gl. (2).

Im Hinblick auf die Gl. (1) hat sich damit für den primären Hertzschen Vektor eines einzelnen, vom Strom  $I^{(n)}$  durchflossenen Stromringes verschwindender Breite mit dem Radius  $a$  in der Ebene  $z = z_n$  der folgende Ausdruck ergeben:

$$P_z^{(tr)}(\varrho, z; a, z_n) = \frac{a I^{(n)}}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot \sqrt{t^2 - k_0^2} \cdot z_n} \cdot t \cdot \begin{cases} (-) K_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot I_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) & (\varrho < a) \\ (+) I_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot K_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) & (\varrho > a) \end{cases} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k_0^2}} \quad (4)$$

Die Wellenzahl  $k_0$  in Gl. (4) sehen wir zunächst etwa infolge eines Dielektrikums mit schwacher Leitfähigkeit  $\kappa_D$  als komplexwertig an. Es fällt dann bei unserer Vereinbarung über das Zeitgesetz in der Größe  $k_D^2$  gemäß den Formeln

$$k_D^2 = k_0^2 \cdot \left( 1 + \frac{i \kappa}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) = k_0^2 \cdot e^{i\delta} / \cos \delta = k_0^2 \cdot (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta) \quad (5)$$

$$(\operatorname{Im} k_D > 0). \quad (5')$$

der Imaginärteil positiv aus. In diesem Falle könnte in Gl. (4) der Integrationsweg nach wie vor die reelle  $t$ -Achse bleiben. Er möge aber schon jetzt nach oben aus der reellen Achse heraus und parallel zu ihr verlegt werden, bis er etwa einen Abstand  $\tau$  mit  $0 < \tau < \operatorname{Im}(k_D)$  hat. Das Zulassen einer imaginären Komponente von  $k_0$  steht natürlich im Widerspruch mit der Annahme eines reellwertigen  $\beta$  im Floquetschen Theorem. Späterhin wird aber  $k_0$  wieder als rein reelle Größe angesehen werden. Die Festsetzung in Gl. (5) hat vorwiegend mathematische Gründe.

Die primäre Anregungsfunktion (4) für das von keinem Hohlleiter umgebene Strahlungsfeld eines einzelnen Stromringes kann nun sofort der Voraussetzung angepaßt werden, daß dieser einzelne Stromring in  $z = z_n$  von einem unendlich langen Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt umgeben ist, dessen Längsachse mit der schon oben benutzten  $z$ -Achse identisch ist und der den Radius  $b > a$  hat. Zu dem Ausdruck (4) muß dann noch auf der rechten Seite unter dem Integral innerhalb der geschweiften Klammer sowohl für  $\varrho < a$  als auch für  $\varrho > a$  der Term

$$K_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) / I_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot I_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot I_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2})$$

hinzutreten.

Führt man nun, um die Schreibweise zu vereinfachen, die beiden Abkürzungen

$$F^{(a)}(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) = \frac{I_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2})}{I_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) / (b \sqrt{t^2 - k_0^2})} \cdot \left[ \frac{I_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) - K_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2})}{I_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) + K_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2})} \right] \quad (a \leq \varrho \leq b), \quad (6a)$$

$$F^{(i)}(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) = \frac{I_0(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2})}{I_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) / (b \sqrt{t^2 - k_0^2})} \cdot \left[ \frac{I_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) - K_1(a \sqrt{t^2 - k_0^2})}{I_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2}) + K_1(b \sqrt{t^2 - k_0^2})} \right] \quad (0 \leq \varrho \leq a) \quad (6a)$$

ein, so kann jetzt der Ausdruck für das Strahlungsfeld eines einzelnen Ringstroms im Inneren eines unbegrenzt langen kreisförmigen Hohlleiters in der nachstehenden und für unsere Zwecke besonders geeigneten Form geschrieben werden:

$$P_z^{(H)}(\varrho, z; a, b; z_n) = \frac{a/b}{4\pi} \cdot I^{(n)} \cdot \int_{-\infty + i\tau}^{+\infty + i\tau} e^{i \cdot |z - z_n| \cdot t} \cdot F^{(a, i)}(\varrho \sqrt{t^2 - k_0^2}) \cdot \frac{dt}{t^2 - k_0^2} \quad [P_z^{(H)}] = A \text{ cm} \quad (\tau < \text{Im } \kappa_D) \quad (7)$$

Die Hilfsfunktionen der Gl. (6a, b) sind in  $\sqrt{t^2 - k_0^2}$  gerade und in der  $t$ -Ebene eindeutige Funktionen, so daß in Gl. (7) in der  $t$ -Ebene keine Verzweigungspunkte vorgesehen zu werden brauchen. Das kann man sich leicht mittels der drei Umlaufsrelationen

$$I_1(a z \cdot e^{\pi i m}) = e^{\pi i m} \cdot I_1(a z), \quad K_0(b z \cdot e^{\pi i m}) = K_0(b z) - \pi i m \cdot I_0(b z), \\ K_1(c z \cdot e^{\pi i m}) = K_1(c z) \cdot e^{-\pi i m} + \pi i m \cdot I_1(c z) \cdot e^{-\pi i m}, \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

klar machen. Es ist demnach gleichgültig, welches Vorzeichen man jeweils der Wurzel gibt, wenn nur im einzelnen Falle immer das gleiche Vorzeichen genommen wird. Aus der Definition der Funktionen  $F^{(a)}$ ,  $F^{(i)}$  durch die Gl. (6a, b) ist außerdem zu ersehen, daß sich ihre Ableitungen nach  $\varrho$  beim Durchgang durch die Zylinderfläche  $\varrho = a$  stetig verhalten, hingegen ist

$$F^{(a)}(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) - F^{(i)}(a \sqrt{t^2 - k_0^2}) = -b/a. \quad (6c)$$

Im Hinblick auf die Gl. 1 (5a, b, c) sind also die Feldkomponenten  $E_\varphi$  und  $H_\varrho$  beim Durchgang durch die Fläche  $\varrho = a$  stetig, hingegen erfährt die Komponente  $H_z$  einen Sprung, dessen axiale Ausdehnung nach rechts oder links jedoch noch von  $z$  abhängt.

Die Möglichkeit, das Strahlungsfeld eines einzelnen Stromringes in der Form der Gl. (7) darzustellen, ist seit langem bekannt [1], wenn auch vielleicht gerade die in Gl. (7) gewählte Art der Darstellung anderswo noch nicht benutzt worden ist. Geht aber, wie im vorliegenden Fall, die Erregung des Feldes von mehreren oder gar unzählig vielen Ringen aus, so weist gerade die hier gewählte Darstellungsart wegen der bequemen Summierbarkeit besondere Vorzüge auf, von denen weiter unten sogleich Gebrauch gemacht werden wird.

Mit Gl. (7) führt dann nämlich jetzt die Summation über die unendlich vielen Ringströme an den Stellen  $z = z_n = (2n + 1) \cdot L$  wegen der Annahme (6) rein formal zu dem Ausdruck:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I^{(n)} \cdot e^{i \cdot |z - z_n| \cdot t} \equiv I \cdot e^{\pi i \beta L} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \cdot n \cdot \beta L} \cdot e^{i \cdot |z - z_n| \cdot t} \\ = I \cdot e^{\pi i \beta L} \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-2\pi i \cdot |n| \cdot \beta L} \cdot e^{i \cdot t \cdot (z + (2 \cdot |n| - 1) L)} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \cdot n \cdot \beta L} \cdot e^{i \cdot t \cdot (-z + (2n + 1) L)} \right]. \quad (8a)$$

Solange hierin  $(L \pm z) > 0$  ist, hat also jedes Reihenglied für ein  $t$  mit  $\text{Im}(t) = \tau > 0$  einen Betrag, der kleiner ist als 1. Damit diese für die Konvergenz der Reihe notwendige Voraussetzung erfüllt ist, muß also, wenn die Summation soll ausgeführt werden können, auch aus diesem Grunde der Integrationsweg in Gl. (7) so geführt werden, daß er oberhalb der reellen  $t$ -Achse verläuft. Damit ist die schon im Text im Anschluß an Gl. (5) erwähnte Wegverschiebung noch nachträglich begründet. Die Summation führt ohne weitere Schwierigkeiten zu dem Ausdruck:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I^{(n)} \cdot e^{i \cdot |z - z_n| \cdot t} = \frac{i}{2} \cdot I \cdot \left[ \frac{e^{+it z}}{\sin(tL - \pi \beta L)} + \frac{e^{-it z}}{\sin(tL + \pi \beta L)} \right] \quad (\text{Im}(t) > 0). \quad (8b)$$

Man gehe mit dieser in  $t$  ungeraden Funktion an Stelle der links stehenden Reihe in die Gl. (7) ein, nachdem darin vorher das Summationszeichen eingesetzt worden ist, und spalte das Integral, das zwischen den Grenzen  $-\infty + i\tau \dots + \infty + i\tau$  mit  $\tau > 0$  zu nehmen ist, gemäß den beiden Summanden  $e^{+it z}$ ,  $e^{-it z}$  in zwei Integrale auf. Ersetzt man dann in dem zweiten von ihnen  $t$  durch  $-t'$ , so bekommt das neue Integral mit der Integrationsvariablen  $t'$  denselben Integranden wie das andere unverändert gelassene Integral. Es hat



jedoch jetzt  $+\infty - i\tau$  als untere und  $-\infty - i\tau$  als obere Grenze. Beide Integrale lassen sich dann zu einem einzigen Integral zusammenfassen, das die Wegschleife  $\mathfrak{B}$  von Abb. 2 als Integrationsweg hat. Dieser Weg bildet einen schmalen Streifen parallel zu der in dessen Inneren gelegenen reellen  $t$ -Achse. Wir wählen den Umlaufssinn für diese Schleife so, daß

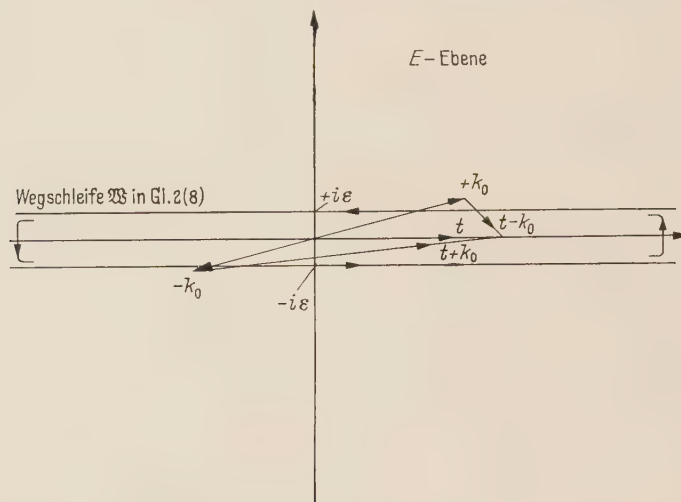


Bild 2. Zeigt den Integrationsweg  $\mathfrak{B}$  des Integrals in Gl. 2 (9) mit seinem positiven Umlaufsraum.

er der mathematisch positiven Umlaufsrichtung für das Innere entspricht. Man erhält dann endgültig die folgende Darstellung:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z; a, b; L) = \frac{aL}{4\pi b} \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{B}} \frac{e^{is \cdot z/L}}{\sin(s - \pi\beta L)} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} \sqrt{s^2 - k_0^2 L^2}\right) \cdot \frac{ds}{s^2 - k_0^2 L^2} \quad [P_z] = A \text{ cm} \quad (9)$$

( $t = s/L$ ;  $F^{(a)}$  für  $a \geq \varrho \leq b$ ,  $F^{(i)}$  für  $0 \geq \varrho \leq b$ ;  $-L \geq z \leq +L$  für  $d \approx 0$ ;  $\text{Im}(k_0 L) > 0$ )  
(Phase des Stroms  $I^{(n)} = I \cdot e^{\pi i (2n+1) \cdot \beta L}$ ).

Der Weg  $\mathfrak{B}$  in Gl. (9) enthält nach den oben getroffenen Vereinbarungen als einzige Singularitäten in seinem Inneren die Nullstellen der Funktion  $\sin(s - \pi\beta L)$ ; die beiden Polstellen  $s = \pm k_0 \cdot L$  und die Pole der Funktion  $F^{(a,i)}$  liegen schon außerhalb der Wegschleife.

Im Hinblick auf spätere Rechnungen möge auch noch eine Variante der Gl. (9) angeschrieben werden. Sie geht aus dieser Gleichung hervor, wenn in Abb. 1 der Koordinatenanfangspunkt in die Stelle  $z = -L$  verlegt wird. Die neue  $z$ -Koordinate möge mit  $\zeta$  bezeichnet werden. Es ist dann

$$z = -L + \zeta \quad (9a)$$

und der entsprechende neue, der Gl. (9) gleichwertige Integralausdruck lautet mithin:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, \zeta; a, b; L) = \frac{aL}{4\pi b} \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{B}} \frac{e^{is \cdot (-1+\zeta/L)}}{\sin(s - \pi\beta L)} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} \sqrt{s^2 - k_0^2 L^2}\right) \cdot \frac{ds}{s^2 - k_0^2 L^2} \quad (10)$$

( $F^{(a)}$  für  $a \geq \varrho \leq b$ ;  $F^{(i)}$  für  $0 \geq \varrho \leq a$ ;  $0 \geq \zeta \leq 2L$  für  $d = 0$ ;  $\text{Im}(k_D L) \geq 0$ ).

Die Lösung (9) oder (10) erfüllt nach wie vor die Differentialgleichung 1 (5). Auch befriedigt sie die Forderung, daß die beiden Feldkomponenten  $E_\varphi$  und  $H_\varphi$  für alle Werte von  $z$  und für ein  $\varrho = b$  verschwinden müssen, denn die dann nach Gl. 1 (5a, b) in beiden Fällen erforderlichen Differentiationen von  $P_z^{(\text{tot})}$  nach  $\varrho$  lassen in der Tat das Integral auf der rechten Seite der Gl. (9) verschwinden, sobald hinterher unter dem Integralzeichen  $\varrho = b$  gesetzt wird.

Darüber hinaus muß aber von der Lösung noch gefordert werden, daß die aus Gl. (9) mittels der Formel 1(5a) ableitbare Beziehung für die Komponente  $E_\varphi(\varrho, z)$  an der Stelle  $\varrho = a$  und im Bereich der ringförmigen Bandleiter zu Null wird. Bei einem gegenüber  $L$  sehr kleinen Wert von  $d$  darf es, wenn nur eine erste Näherung angestrebt wird, als erlaubt angesehen werden, diese Forderung durch die wesentlich einfachere zu ersetzen, daß  $E_\varphi$  für  $\varrho = a$  und für die beiden Stellen  $z = \pm(L - d)$  verschwindet. Wegen der Periodizität der aus (9) zu entwickelnden Lösung erfolgt dann das Verschwinden von  $E_\varphi$  auch an den unzählig vielen anderen Stellen  $z = z_n \pm d$ . Schon diese vereinfachte Forderung ist aber nicht leicht zu erfüllen, wie sich bald zeigen wird.

### 3.1. Die Auflösung der Reihe 2(9, 10) nach den Eigenfunktionen der periodischen Struktur

Eine erste Reihenentwicklung, die eine zahlenmäßige Berechnung ermöglichen könnte, ist von Gl. 2 (9) aus dadurch zu erzielen, daß man in dieser Gleichung den Weg  $\mathfrak{B}$  auf die einfachen Pole des Integranden dieser Gleichung in Form der Sinus-Funktion an den Stellen

$$s = s_n = \pi \beta L + \pi n = \pi (n + \beta L)$$

auf der reellen  $s$ -Achse zusammenzieht. Für diese Pole berechnet sich mühelos

$$\Re\left\{\frac{1}{\sin(s - \pi \beta L)}\right\} = (-)^n / \pi$$

und damit ergibt sich bereits die folgende Entwicklung:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z; a, b; L) = \frac{aL}{4b} \cdot I \cdot e^{\pi i \beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n \cdot e^{\pi i n \cdot z/L} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) / w_n^2 \quad \text{A cm}, \quad (1)$$

in der gemäß Abb. 1 die Ströme  $I^{(-1)}$  und  $I^{(0)}$  in den in den Ebenen  $z = \pm L$  stehenden Ringe die Größen  $I \cdot e^{\pm \pi i \beta L}$  haben. Außerdem ist in Gl. (1) definitionsgemäß:

$$w_n^2 = \pi^2 (\beta L + n)^2 - k_0^2 L^2 = \pi^2 \cdot [(\beta L + n)^2 - (2L/\lambda_0)^2] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (1a)$$

Die Lösung (1) zeigt in der Tat die durch das Floquetsche Prinzip geforderte Eigenschaft. Setzt man nämlich in Gl. (1)  $z = 2L \cdot q + z'$  mit  $q$  als einer positiven oder negativen ganzen oder verschwindenden Zahl, so erhält man die Gleichung

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z'; a, b; L) = \frac{aL}{4b} \cdot I \cdot e^{\pi i \beta \cdot 2Lq} \cdot e^{\pi i \beta z'} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n \cdot e^{\pi i n \cdot z'/L} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) / w_n^2 \quad (1')$$

und bezogen auf das neue Koordinatensystem wird jetzt der in der Ebene  $z' = -L$  stehende bandförmige Ringleiter von dem Strom  $I \cdot e^{-\pi i \beta L + \pi i \beta \cdot 2L \cdot q}$  durchflossen.

Wir setzen nun neuerdings zur Abkürzung

$$D_i\left(w_n; \frac{\varrho}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) = \frac{I_0\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right)}{I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right)} \cdot \begin{vmatrix} I_1\left(\frac{a}{L} w_n\right) & K_1\left(\frac{a}{L} w_n\right) \\ I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) & K_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) \end{vmatrix} \equiv \frac{L}{b} \cdot F^{(i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) / w_n \quad (0 \leq \varrho \leq a), \quad (2a)$$

$$D_a\left(w_n; \frac{\varrho}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) = \frac{I_1\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right)}{I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right)} \cdot \begin{vmatrix} I_0\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) - K_0\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) \\ I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) + K_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) \end{vmatrix} \equiv \frac{L}{b} \cdot F^{(a)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) / w_n \quad (a \leq \varrho \leq b), \quad (2b)$$

$$D\left(w_n; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) = \frac{I_1\left(\frac{a}{L} w_n\right)}{I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right)} \cdot \begin{vmatrix} I_1\left(\frac{a}{L} w_n\right) & K_1\left(\frac{a}{L} w_n\right) \\ I_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) & K_1\left(\frac{b}{L} w_n\right) \end{vmatrix}. \quad (2c)$$



Macht man in (2c) unter der Annahme, daß es auch schon bei dem kleinsten Argument  $a/L \cdot w_n$  erlaubt ist, für die Funktionen  $I_0, I_1$  von den Hankelschen Näherungen Gebrauch zu machen, so gilt der Grenzwert

$$D\left(w_n; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) \rightarrow -\frac{L}{w_n \cdot \sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{b-a}{L} \cdot w_n} \cdot \operatorname{Si}\left(\frac{b-a}{L} w_n\right) \quad (b > a, w_n \rightarrow \infty). \quad (2\gamma)$$

Es nimmt also absolut genommen dieses  $D$  wie  $|n|^{-1}$  ab. Für die Feldkomponente  $H_z$ , wie sie sich auf Grund der Gl. 1 (5c) aus Gl. 3 (1) berechnet, hört die Konvergenz für  $\varrho = a$  ganz auf. Dem entspricht, daß diese Komponente in der Zylinderfläche  $\varrho = a$  für  $z$  im Bereich  $-(L+d) \leq z \leq -(L-d)$  sich unstetig verhält.

Dann ist z. B. nach Gleichung 1 (5a):

$$E_\varphi(a, z) = -\frac{i \omega \mu_0}{4} \cdot a/L \cdot I e^{\pi i \beta z} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n e^{\pi i n \cdot z/L} \cdot D\left(w_n; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right). \quad (3)$$

Da nun die Komponente  $E_\varphi(a, z)$  z. B. für  $z = \pm(L-d)$  verschwinden muß, so lautet die Gleichung, aus der die unbekannte Größe  $\beta$  zu bestimmen ist:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pm \pi i n \cdot d/L} \cdot D\left(w_n; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) = 0 \quad (d/L \approx 0). \quad (4a)$$

Geht man zu einer nur einseitig ins Unendliche strebenden Reihe über, so erhält man:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ D\left(w_{-n}; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) \cdot e^{\mp \pi i n \cdot d/L} + D\left(w_{+n}; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) \cdot e^{\pm \pi i n \cdot d/L} \right] / (1 + \delta_{0n}) = 0. \quad (4b)$$

Selbst die nur angenäherte Auflösung dieser Gleichung nach der unbekannten Größe  $\beta$ , die auch in den Gliedern  $w_{\pm n}$  steckt, dürfte große Schwierigkeiten bereiten.

### 3.2. Die Auflösung der Reihe 2(9) nach den Eigenfunktionen der Hohlleiterwelle

Wir wenden uns nun der zweiten unendlichen Kette von einfachen Polen des Integrals in Gl. 2(9) zu. Zu Polen dieser Art können Anlaß geben die beiden Nullstellen

$$s = \pm k_0 L \quad \operatorname{Im}(k_0) \equiv \operatorname{Im}(k_D) \geq 0 \quad (5a)$$

und die unendliche Reihe von Nullstellen  $s = \pm \sigma_q$  der Funktion  $I_1\left(\frac{b}{L} \sqrt{s^2 - k_0^2 L^2}\right)$  in bezug auf  $s$ . Sie lassen sich also aus der Gleichung

$$\frac{b}{L} \sqrt{\sigma_q^2 - (k_0 L)^2} = i \cdot j_{1q} \equiv i \cdot j'_{0q} \quad (J_1(j_{1q}) = -J'_0(j'_{0q}) = 0) \quad (5b_1)$$

berechnen, so daß sich in der unmittelbaren Nachbarschaft der Nullstellen  $s = \sigma_q + \varepsilon$  mit einem  $\varepsilon$ , das sehr klein und positiv ist, angenähert

$$\frac{b}{L} \sqrt{(\sigma_q + \varepsilon)^2 - (k_0 L)^2} = i \cdot j'_{0q} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \left(\frac{b}{j'_{0q} \cdot L}\right)^2 \cdot \sigma_q + O(\varepsilon^2)\right) \quad (5b_2)$$

muß schreiben lassen. Umgekehrt ist dann im Hinblick auf die Gl. 1 (2a, b) für die Nullstellen  $s = \sigma_q$  selbst:

$$s \equiv \sigma_q = L/b \cdot \sqrt{(k_0 b)^2 - j'^2_{0q}} = k_0 L \cdot \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda'_g)^2} = 2\pi L/\lambda'_H^{(q)}. \quad (5b)$$

Unter der Annahme  $j'_{0,n} < k_0 \cdot b < j'_{0,n+1}$  ist also  $\sigma_n$  reell für  $q \geq n$  und rein imaginär für  $q \leq n$ . Somit ist für jede beliebige, in der Umgebung von  $s = \sigma_q$  reguläre Funktion allgemein

$$f\left(\frac{b}{L} \sqrt{(\sigma_q + \varepsilon)^2 - (k_0 L)^2}\right) = f(+i \cdot j'_{0q}) - \varepsilon \cdot i \sigma_q \cdot \frac{(b/L)^2}{j'_{0q}} \cdot f'(i \cdot j'_{0q}) + O(\varepsilon^2). \quad (6)$$

$f$  kann hierin jede der Funktionen sein, die z. B. in den Gl. 2 (6a, b) auftreten. So ist dann also an der Stelle  $s = \sigma_q$  wegen Gl. (5b<sub>1,2</sub>):

$$I_1'(\pm i j_{1q}) = J_1'(j_{1q}) = J_0(j_{0q}') , \quad (7a)$$

$$K_1(\pm i \cdot j_{1q}) = \pm \frac{\pi i}{2} \cdot Y_1(j_{0q}') , \quad (7b)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{I_1} \left( \frac{b}{L} \sqrt{s^2 - (k_0 L)^2} \right) \right\}_{s=\sigma_q} = \frac{L}{b} \cdot \frac{i j_{0q}'}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j_{0q}'^2}} \cdot (1/J_0(j_{0q}')) . \quad (7c)$$

Was die beiden Nullstellen (5a) anbetrifft, so lassen sich die zugehörigen Residuen sehr leicht berechnen, sobald erst einmal die Werte der Funktionen 2, 6 (a, b) für verschwindendes Argument bekannt sind. Da nun aber für sehr kleine Werte von  $z$  auf Grund der Reihenentwicklungen

$$I_1(z) \approx z/2 + O(z^3) , \quad K_0(z) \approx -\ln(z/2) + \text{Const} , \quad K_1(z) = 1/z + O(z \cdot \ln z) ,$$

so wird in der Bezeichnung von Gl. 2 (9):

$$F^{(a)}(0) = a/b , \quad (8a)$$

$$F^{(i)}(0) = a/b - b/a , \quad (8b)$$

wenn das Verschwinden des Argumentes der Funktion  $F^{(a,i)}$  durch den Faktor  $s^2 - (2\pi L/\lambda_0)^2$  bewirkt wird.

Der Übergang von der Gl. 2(9) zu der Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen der  $H_{0q}$ -Wellen kann von dieser Gleichung aus in der Weise erfolgen, daß etwa die obere Hälfte des Weges  $\mathfrak{B}$ , die von  $+\infty + i\gamma$  nach  $-\infty + i\gamma$  verläuft, in der oberen  $t$ -Halbebene durch einen Halbkreis zu einem geschlossenen Integrationsweg ergänzt und dann der Residuensatz angewendet wird. Der Beitrag des oberen Halbkreises zum Wert des Integrals verschwindet, und zwar für alle Werte  $z \geq 0$ , für die  $|z| < L$  ist, wenn der Radius des Halbkreises unendlich groß gemacht wird. Das ist aus dem asymptotischen Verhalten der im Integral vorkommenden Funktion ohne Schwierigkeit zu ersehen. Es ist ferner zu beachten, daß der Punkt  $s = \pm k_0 L$  und die sämtlichen einfachen Pole  $s = +\sigma_q$  innerhalb dieses Halbkreises liegen. Nach Gl. (5b) ist für kleine Werte von  $q$  bei reellem  $k_0$  auch  $\sigma_q$  reell. Für immer größer werdende Werte von  $q$  strebt aber  $\sigma_q$  gegen einen rein imaginären Grenzwert. Die Behandlung der oberen Hälfte des Weges  $\mathfrak{B}$  in Gl. (9) führt gemäß diesen Erläuterungen schließlich zu dem folgenden Ausdruck:

$$+ \frac{a}{8} \cdot I \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{e^{+i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q - \pi\beta L)} \cdot \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j_{0q}'\right) \cdot Y_1(j_{0q}')}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j_{0q}'^2} \cdot J_1'(j_{0q}')} J_0\left(\frac{a}{b} j_{0q}'\right) (-L \leq z \leq +L) .$$

Hierin ist der Term fortgelassen worden, der von dem Pol  $s = +k_0 L$  herrührt, da er nur von  $z$  abhängt und die Gl. 1(5) durch ihn identisch erfüllt wird, so daß alle über die Gl. 1(5a, b, c) aus ihm errechneten Feldkomponenten verschwinden.

In entsprechender Weise kann man mit der unteren Weghälfte des Integrals von Gl. 2(9) verfahren. Auch hier muß von unten her ein Halbkreis von unendlich großem Radius an den Weg von  $-\infty - i\gamma \dots +\infty - i\gamma$  angesetzt gedacht werden, so daß dadurch keine Wertänderung eintritt. Innerhalb der unteren  $s$ -Halbebene haben jetzt die Nullstellen des Integranden von Gl. (9) das entgegengesetzte Vorzeichen wie in der oberen  $s$ -Halbebene. Eine neue Berechnung dieses zweiten Integrals kann aber auch ganz vermieden werden, und zwar dadurch, daß das jetzt zwischen den Grenzen  $-\infty \dots -i\gamma \dots +\infty -i\gamma$  zu nehmende Integral mit dem in Gl. 2(9) angegebenen Integranden durch den Übergang von  $s$  zu  $-s$  in ein Integral mit den Grenzen  $+\infty +i\gamma \dots -\infty +i\gamma$  übergeführt wird. Dieses Integral stimmt dann mit dem in Gl. 2(9) überein, nachdem darin im ersten Faktor des Integranden  $+i$  im Exponenten durch  $-i$  und im Nenner  $-\pi\beta L$  durch  $+\pi\beta L$  ersetzt worden ist.



Man bekommt also jetzt den Ausdruck:

$$+ \frac{a}{8} I \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{e^{-i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q + \pi \beta L)} \cdot \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right) \cdot J_0\left(\frac{\varrho}{b} \cdot j'_{0q}\right)}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j'^2_{0q}} \cdot J'_1(j'_{0q})} \cdot Y_1(j'_{0q}) \quad (-L < z < +L).$$

Faßt man die beiden obigen Bestandteile zusammen, so ergibt sich für diese zweite Reihendarstellung die folgende Entwicklung nach Eigenwellen:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z; a, b; L) = \frac{a}{8} I \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right) \cdot J_0\left(\frac{\varrho}{b} j'_{0q}\right)}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j'^2_{0q}}} \cdot \frac{Y_1(j'_{0q})}{J'_1(j'_{0q})} \cdot \left[ \frac{e^{-i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q + \pi \beta L)} + \frac{e^{+i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q - \pi \beta L)} \right] \quad (8)$$

$$(0 \leq \varrho \leq a; \quad -L \leq z \leq +L; \quad \sigma_q = 2\pi L/\lambda_H^{(q)} = k_0 L \cdot \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_H^{(q)})^2}).$$

Physikalisch sagt die Gl. (8) aus, daß infolge des Durchzugs der Wellen durch die Ringe des Hohlleiters die dabei induzierten Ringströme die Wirkung von Antennen haben, die nun nach den beiden Richtungen zu- und abnehmender Werte von  $z$  teils ungedämpfte, teils stark gedämpfte Wellen aussenden. Die Grenzfrequenzen oder Grenzwellenlängen  $\lambda_q'$  von Gl. 1 (2a) für die einzelnen Teilwellen befolgen dabei dieselben Gesetze wie in einem Hohlleiter ohne die periodische Struktur der Ringe. Die Faktoren  $\sin(\sigma_q \pm \pi \beta L)$  in Gl. (9) lassen aber erkennen, daß sie sehr maßgeblich die Amplituden der ausgestrahlten Wellen beeinflussen.

Auf Grund der Gl. 1 (5a) berechnet sich dann z. B.

$$E_\varphi(a; \pm(L-d)) = \frac{i \omega \mu_0 \cdot a}{16 b} \cdot I \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1^2\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right)}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j'^2_{0q}}} \cdot \frac{j'_{0q} \cdot Y_1(j'_{0q})}{J'_1(j'_{0q})} \cdot \left[ \frac{e^{+i \sigma_q \left(1 - \frac{d}{L}\right)}}{\sin(\sigma_q - \pi \beta L)} + \frac{e^{-i \sigma_q \left(1 - \frac{d}{L}\right)}}{\sin(\sigma_q + \pi \beta L)} \right] \quad (9)$$

Die in Gl. (9) auftretende Reihe ist konvergent, jedoch nur im Sinne der bedingten Konvergenz. Berücksichtigt man noch, daß aus schon vorher erörterten Gründen  $E_\varphi(a, z)$  verschwinden muß, wenn der Punkt  $(a, z)$  in den Randebenen  $z = \pm(L-d)$  des vollkommen leitenden Ringes liegt, so hat man in diesem zweiten Fall in der Beziehung

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1^2\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right)}{\sqrt{(k_0 b)^2 - j'^2_{0q}}} \cdot \frac{j'_{0q} \cdot Y_1(j'_{0q})}{J'_1(j'_{0q})} \cdot \left[ \frac{e^{+i \sigma_q \left(1 - \frac{d}{L}\right)}}{\sin(\sigma_q - \pi \beta L)} + \frac{e^{-i \sigma_q \left(1 - \frac{d}{L}\right)}}{\sin(\sigma_q + \pi \beta L)} \right] = 0 \quad (9a)$$

wieder eine Bestimmungsgleichung für die Phasenkonstante  $\beta$  vor sich.

Mathematisch gesehen stehen die früher gewonnenen beiden Bestimmungsgl. (4a, b) zu der obigen Gl. (9a) in der Beziehung zweier ineinander transformierter Reihen.

Eine weitere Prüfung auf die Richtigkeit der Lösung bietet sich schließlich noch dadurch an, daß für  $L \rightarrow \infty$  jeder Einfluß der periodischen Struktur auf die Form der Lösung verloren gehen muß. Um diese Prüfung zu vollziehen, darf der Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  allerdings nicht unmittelbar an der Gl. (9) ausgeführt werden, denn ein Blick auf Abb. 1 lehrt, daß bei der hierin angenommenen Lage des Koordinatenursprungs der Übergang  $L \rightarrow \infty$  auch zugleich die Stromringe aus dem endlichen Teil des Beobachtungsraums hinausrückt. Man muß vielmehr jetzt die Gl. 2 (10) benutzen. Ersetzt man dann noch in dieser Gleichung  $s$  durch  $v \cdot L$ , so nimmt sie die Form

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z'; a, b; L) = \frac{a I}{4 \pi b} \cdot \frac{1}{2 \pi i} \int_{\mathfrak{B}} \frac{e^{i v \cdot (-L + \zeta)}}{\sin L (v - \pi \beta)} \cdot F^{(a, i)}(\varrho \sqrt{v^2 - k^2}) \cdot \frac{dv}{v^2 - k_0^2} \quad (0 \leq \zeta \leq 2 L) \quad (10)$$

an, in der nunmehr die Länge  $2 L$  nur noch in der Exponentialfunktion und unter dem Sinus auftritt. Mit der Bezeichnung  $\text{Im}(v) = \nu$  ist dann

$$\left[ \frac{e^{-i \nu L}}{\sin L (v - \pi \beta)} \right] = \begin{cases} 2i & \text{für } \nu > 0 \\ 0 & \text{für } \nu < 0 \end{cases} \quad \text{und } L \rightarrow \infty.$$

Somit lautet die Lösung der vorgelegten Aufgabe, wenn keine ringförmigen Bandleiter im Hohlleiterinneren vorhanden sind:

$$P_z^{(\text{tot})}(q, z'; a, b; \infty) = \frac{a}{4\pi b} \cdot \frac{2i}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} F^{(a,i)}(q/\sqrt{v^2 - k_0^2}) \cdot e^{i v z'} \cdot \frac{dv}{v^2 - k_0^2}. \quad (11)$$

Der Faktor  $I$  hat in dieser Gleichung dann nur noch die Bedeutung, daß er den Einfluß der unbestimmt bleibenden Anregung des Feldes wiedergibt. Damit ist in der Tat eine alte, längst bekannte Lösung [1] aus der die Anregung mitberücksichtigenden Hohlleitertheorie wieder erreicht worden.

#### 4. Eine Modifikation der bisherigen Näherungslösung

Die bisher gewonnenen Lösungsgl. 3(1) und 3(8) hatten für den unbekannten Phasenwinkel  $\beta$  im Anschluß an die Gl. 3(1) zu den Bestimmungsgl. (4a) oder (4b) geführt. Diese waren auf Grund der Vorstellung gewonnen worden, daß die Ströme  $I^{(n)}$  in den einzelnen bandförmigen Ringen jeweils als lineare Ströme behandelt werden können, die in den Mittelebenen  $z = z_n = (2n + 1) \cdot L$  der zu einem Ring zusammengebogenen Bandleiter fließen. Das erforderliche Verschwinden von  $E_\varphi$ , das eigentlich über die ganze Breite  $2d$  der Ringe

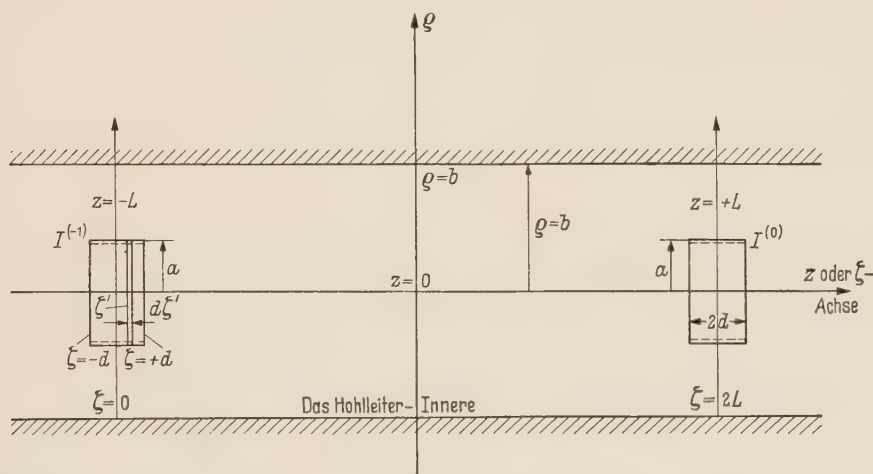


Bild 3. Der Einfluß der Ringbreite wird dadurch verschärft in Rechnung gestellt, daß der stromdurchflossene Ring aufgelöst wird in zahlreiche, „lineare“ Ringströme, die aber phasengleich sind. Im übrigen ist immer noch  $2d \gg 2L$ .

erfolgen müßte, wird nur in den Randebenen  $z = z_n \pm d$  mit  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  aller Ringe angestrebt, und eben hierin drückt sich vor allem der Näherungscharakter der hier hergestellten Lösung aus.

Diese die Größe  $\beta$  bestimmende Bedingung läßt sich auch noch in anderer Weise formulieren. Zwar wird die der Strenge ermangelnde Lösung in dieser Hinsicht nicht etwa verbessert, aber es dürfte dennoch die neue, nach einem anderen Gesichtspunkt aufgestellte Berechnungsvorschrift für  $\beta$  quantitativ zuverlässiger sein.

Die physikalische Vorstellung, von der dabei neuerdings ausgegangen werden soll, spricht sich in der Annahme aus, daß die Ströme  $I^{(n)}$  in den einzelnen Ringen mit der nach wie vor sehr kleinen Breite  $2d \ll 2L$  überall in dem Bereich ein und desselben Ringes noch weiter in Teilströme aufgelöst werden, die unter sich gleichphasig sind. Hingegen soll von Ring zu Ring die Änderung der Phase nach wie vor dem durch Gl. 1(6) angegebenen Gesetz unterworfen sein. Die Phasenlage der Teilströme  $I^{(n)} \cdot dz_n/2d$  auf jedem der Ringe soll also allemal durch  $I \cdot \exp(\pi i (2n + 1) \cdot \beta L)$  gegeben sein. Es ist dann zunächst die Frage nach der hierdurch bedingten Modifikation der Gl. 3(1) zu beantworten.



Wir setzen in dieser Gleichung wie schon früher in Gl. 2 (9a) vorerst wieder  $z = -L + 3d$  und erhalten dann:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, \zeta; a, b; L) = \frac{aL}{4b} \cdot I \cdot e^{-\pi i \beta L} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+\pi i(n+\beta L) \cdot \zeta/L} F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) w_n^2. \quad (1)$$

Am Orte  $\zeta = 0$  liegt jetzt gemäß Abb. 3 der Ring mit dem mittleren Strom  $I^{(-1)}$ , und zwar genauer seine Mittelebene  $z = -L$  oder  $\zeta = 0$ . Für den auf die Breite  $d\zeta'$  des Ringes entfallenden Teilstrom ist mithin das zugehörige  $dP_z^{(\text{tot})}$ , wenn diese Stromscheibe gerade in der Ebene  $\zeta = 0$  liegt, wieder durch Gl. (1) gegeben, nachdem darin  $I$  durch  $I \cdot d\zeta'/2d$  ersetzt worden ist. Liegt aber die Stromscheibe im Punkt  $\zeta = \zeta'$  mit  $-d \leq \zeta' \leq +d$ , so geht der zugehörige Wert von  $dP_z$  aus Gl. (1) hervor, indem darin wiederum  $I$  durch  $I \cdot d\zeta'/2d$ , aber außerdem noch  $\zeta$  durch  $\zeta - \zeta'$  ersetzt wird, und das gilt sowohl für  $\zeta' < \zeta$  als auch für  $\zeta' > \zeta$ . Hinterher ist der Ausdruck für  $dP_z^{(\text{tot})}$  noch zwischen den Grenzen  $-d$  und  $+d$  zu integrieren.

An die Stelle der Gl. (1) muß also unter den oben angegebenen Voraussetzungen die Beziehung

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, \zeta; a, b; L, d) = \frac{aL}{4b} \cdot I \cdot e^{-\pi i \beta L} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left[\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}\right]}{\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}} e^{+\pi i(n+\beta L) \cdot \frac{\zeta}{L}} \frac{F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right)}{w_n^2} \quad (2a)$$

$$(-\infty < \zeta < +\infty)$$

treten. Geht man wieder mittels der Gl. 2 (9a) zu der Koordinate  $z$  über, so resultiert:

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z; a, b; d, L) = \frac{aL}{4b} \cdot I \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n \cdot \frac{\sin\left(\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}\right)}{\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}} e^{+\pi i(n+\beta L) \cdot z/L} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} w_n\right) \Big| w_n^2 \quad (2b)$$

Der Vergleich von Gl. (2b) mit der Gl. 3 (1) läßt dann aber sofort erkennen, daß die oben angeschriebene Gleichung auch aus der komplexen Integraldarstellung

$$P_z^{(\text{tot})}(\varrho, z; a, b; d, L) = \frac{aL}{4\pi b} \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{B}} \frac{e^{i \cdot s \cdot z/L}}{\sin(s - \pi \beta L)} \cdot \frac{\sin\left(s \cdot \frac{d}{L}\right)}{\left(s \cdot \frac{d}{L}\right)} \cdot F^{(a,i)}\left(\frac{\varrho}{L} \sqrt{s^2 - k_0^2 L^2}\right) \cdot \frac{ds}{s^2 - k_0^2 L^2} \quad (3)$$

$$(-L \leq z \leq +L)$$

abgeleitet werden kann, wenn  $\mathfrak{B}$  wiederum der in Abb. 2 dargestellte Integrationsweg ist.

Die Berechnung von  $\beta$  ist dann jetzt gemäß den Gl. 1 (5a) und 3 (2c) an Hand der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left[\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}\right]}{\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}} \cdot D\left(w_n; \frac{a}{L}; \frac{a}{L}, \frac{b}{L}\right) \Big| w_n = 0 \quad (4)$$

$$w_n^2/\pi^2 = (\beta L + n)^2 - (2L/\lambda_0)^2$$

vorzunehmen. Infolge des ersten Faktors unter dem Summenzeichen tritt in Gl. (4) ein gesetzmäßiger Vorzeichenwechsel ein. Überdies strebt für  $n \rightarrow \infty$  jedes Glied der Reihe nunmehr wie  $1/n^3 \rightarrow 0$ .

Berechnet man in Gl. (2b) die Differenz der Komponenten von  $H_z$  für  $\varrho = a +$  und  $\varrho = a -$  und beachtet die Gl. 2 (6c), so erhält man

$$H_z^{(\text{tot})}(a+; z; a, b; d, L) - H_z^{(\text{tot})}(a-; z; a, b; d, L)$$

$$= \frac{I}{4L} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n \cdot e^{+\pi i(n+\beta L) \cdot z/L} \cdot \frac{\sin\left[\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}\right]}{\pi(n+\beta L) \cdot \frac{d}{L}} \quad (5a)$$

oder, wenn statt der Gl. (2b) die Gl. (3) herangezogen wird:

$$P_z^{(\text{tot})}(a+, z; a, b; d, L) - P_z^{(\text{tot})}(a-, z; a, b; d, L) \\ = -\frac{L}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{B}} \frac{e^{is \cdot z/L}}{\sin(s - \pi\beta L)} \cdot \frac{\sin\left(s \frac{d}{L}\right)}{\left(s \cdot \frac{d}{L}\right)} \cdot \frac{ds}{s^2 - k_0^2 L^2} \quad (-L \leq z \leq +L). \quad (5b)$$

Die Gl. (5a) folgt jetzt auch aus dem mittleren Teil der Gl. 1(5c) nach Anwendung des Residuensatzes auf das Integral über den Weg  $\mathfrak{B}$ , wenn man ihn auf die reelle Achse zusammenzieht. Läßt man aber aus dem Streifen innerhalb  $\mathfrak{B}$  einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $s = 0$  und mit einem gegen  $\infty$  strebenden Radius werden, so verschwindet das Integral für alle  $-(L-d) < z < +(L-d)$ , und die in Gl. (5a) angegebene Differenz ist ebenfalls im Bereich  $-2L \cdot q - (L+d) \leq z \leq -(L-d) - 2L \cdot q$ ,  $q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  von Null verschieden. Dasselbe Resultat gilt dann auch noch für die Differenz in Gl. (5a).

Schließlich kann auch wieder für  $P_z^{(\text{tot})}$  gemäß Gl. (3) eine der Gl. 3(8) entsprechende Entwicklung angegeben werden. Jedoch gilt auch sie zunächst nur für den Bereich von  $z$  zwischen den bandförmigen Stromringen, und sie lautet:

$$P_z^{(\text{tot})}(q, z; a, b; L) = \frac{a}{8} \cdot I \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right) \cdot J_0\left(\frac{q}{b} j'_{0q}\right)}{\sigma_q \cdot b/L} \cdot \frac{Y_1(j'_{0q})}{J_0(j'_{0q})} \cdot \frac{\sin\left(\frac{d}{L} \sigma_q\right)}{\frac{d}{L} \sigma_q} \\ \times \left[ \frac{e^{-i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q + \pi\beta L)} + \frac{e^{+i \cdot z/L \cdot \sigma_q}}{\sin(\sigma_q - \pi\beta L)} \right], \quad (6) \\ \left( \tau_q \cdot \frac{b}{L} = \sqrt{(j'_{0q})^2 - (b k_0)^2}, \quad \sigma_q = 2\pi \cdot \frac{L}{\lambda_H^{(q)}}; \quad -(L-d) \leq z \leq +(L-d); \right. \\ \left. \frac{d}{b} \sqrt{(k_0 b)^2 - j_{0q}^2} = 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda_H^{(q)}} = \sigma_q \cdot \frac{d}{L} \right).$$

Es handelt sich noch darum, den numerischen Wert der Konstanten  $\beta$  auf irgend einem geeigneten Wege zu ermitteln.

### 5. Die Berechnung von $\beta$

Von den verschiedenen, zur Berechnung von  $\beta$  gewonnenen Beziehungen scheint die Gl. 3(9a) oder 4(7) am geeignetsten zu sein, und zwar gilt das besonders für den Fall, wo nur einige wenige Teilwellen des Hohlleiterfeldes als praktisch ungedämpfte Wellen existieren. In den erwähnten Gleichungen ist dann z. B. bei nur einer solchen Welle zu setzen:

$$\sigma_1 = 2\pi \cdot L / \lambda_H^{(1)} \quad (q=1), \quad (1a)$$

$$\sigma_q = i \cdot 2\pi \cdot L / \lambda_0 \cdot \sqrt{(\lambda_0 / \lambda_q^{(q)})^2 - 1} = i \cdot \tau_q \quad (q=2, 3, 4 \dots). \quad (1b)$$

Für  $q \geq 2$  schreibt sich aber die zweite Zeile ohne Rücksicht auf das Glied  $q \cdot b/L$  im Nenner der ersten Zeile in Gl. 4(7) in der Form:

$$\frac{\sin\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)}{i \cdot \frac{d}{L} \tau_q} \cdot \left[ \frac{e^{z/L \cdot \tau_q}}{\sin(\tau_q - i \cdot \pi\beta L)} + \frac{e^{-z/L \cdot \tau_q}}{\sin(\tau_q + i \cdot \pi\beta L)} \right] \quad (q=2, 3, \dots) \quad (A_q)$$

und wenn man hierin die innerhalb der eckigen Klammern stehenden Sin-Funktionen weiterhin durch die größere der beiden Exponentialfunktionen annähert, aus denen sie sich zusammensetzen, so gestattet jedes der unendlich vielen Glieder  $(A_q)$  mit  $q = 2, 3, 4 \dots$  für  $z/L = +(1 - d/L)$  die noch einfachere Näherungsdarstellung:

$$\frac{\sin\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)}{i \cdot \frac{d}{L} \tau_q} \cdot 2 \cdot e^{-\tau_q \cdot \frac{d}{L} + i \cdot \pi\beta L} \quad z/L = +\left(1 - \frac{d}{L}\right). \quad (2a)$$



Entsprechend hat bei einem  $z/L = -(1 - d/L)$  für  $A_q$  angenähert der Ausdruck

$$\frac{\Im \sin\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)}{i \cdot \frac{d}{L} \tau_q} \cdot 2 \cdot e^{-\tau_q \cdot \frac{d}{L} - \pi i \beta L} \quad (2b)$$

zu treten.

Für die rein imaginären Werte der  $\sigma_q$  liefert also im ganzen für jedes  $q = 2, 3, 4 \dots$  die zweite Zeile der Gl. 4(7), die nach Gl. 1(5a) in diesem Teil auch unverändert in dem Ausdruck für  $E_\varphi$  auftritt, den Beitrag

$$2 \cdot \frac{\Im \sin\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)}{\frac{d}{L} \tau_q \cdot i} \cdot e^{-\tau_q \cdot d/L \pm \pi i \beta L} \quad (q = 2, 3, 4 \dots) \quad (3a)$$

Zieht man aber die zweite Zeile der Gl. 4(7) heran und setzt nun darin  $\sigma_q = \sigma_1$ , so ergibt sich mit  $z/L = \pm (1 - d/L)$  nach Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen als Gegenstück zu (3a) der Ausdruck:

$$2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{d}{L} \sigma_1\right) / \left(\frac{d}{L} \sigma_1\right)}{\cos 2 \pi \beta L - \cos 2 \sigma_1} \cdot \sin 2 \sigma_1 \cdot e^{\pm \pi i \beta L} \quad (3b)$$

Dabei ist hier zuvor in der neu entstehenden Klammer mit den Summanden  $\sin\left(2 - \frac{d}{L}\right) \sigma_1 \pm \sin\left(\frac{d}{L} \sigma_1\right)$  das Glied  $2 - d/L \cong 2$  und der zweite Summand ganz fortgelassen worden.

Drückt man nun mittels Gl. 4(7) die Forderung aus, gemäß der für  $z/L = \pm (1 - d/L)$  die Feldkomponente  $E_\varphi(a, z)$  verschwinden muß, so bekommt man im ganzen die folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{4}{i b} \cdot e^{\pm \pi \beta L} \cdot \left\{ \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{01}\right) \cdot J_1\left(\frac{a}{b} j'_{01}\right)}{\sigma_1 \cdot b/L} \cdot \frac{j'_{01} \cdot Y_1(j'_{01})}{J_0(j'_{01})} \cdot \frac{\sin\left(\frac{d}{L} \sigma_1\right) / \left(\frac{d}{L} \sigma_1\right)}{\cos 2 \pi \beta L - \cos 2 \sigma_1} \right. \\ \left. + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right) \cdot J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right)}{\tau_q \cdot b/L} \cdot \frac{j'_{0q} \cdot Y_1(j'_{0q})}{J_0(j'_{0q})} \cdot \frac{\Im \sin\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)}{\left(\frac{d}{L} \tau_q\right)} e^{-\tau_q \cdot d/L} \right\} = 0 \quad (4)$$

Demnach lautet die Bestimmungsgleichung für den gesuchten Parameter  $\beta$

$$\frac{\sin\left(\frac{d}{L} \sigma_1\right) / \left(\frac{d}{L} \sigma_1\right)}{\cos 2 \pi \beta L - \cos 2 \sigma_1} \cdot \frac{j'_{01} \cdot Y_1(j'_{01})}{J_0(j'_{01})} \cdot \frac{J_1\left(\frac{a}{b} j'_{01}\right) \cdot J_1\left(\frac{a}{b} j'_{01}\right)}{\sigma_1 \cdot b/L} \cdot \sin 2 \sigma_1 \\ = - \sum_{q=2}^{\infty} \left( J_1\left(\frac{a}{b} j'_{0q}\right) \right)^2 \cdot \frac{j'_{0q} \cdot Y_1(j'_{0q})}{J_0(j'_{0q})} \cdot \frac{1 - \exp[-2 \tau_q \cdot d/L]}{2 \cdot b \cdot d/L^2 \cdot \tau_q^2} \quad (5)$$

$$(\sigma_1 = 2 \pi L / \lambda_H^{(1)}, \sigma_q = i \tau_q = i \cdot 2 \pi L / \lambda_0 \cdot \sqrt{(\lambda_0 / \lambda_H^{(q)})^2 - 1}; \quad q = 2, 3, 4 \dots)$$

Die Änderungen, die angebracht werden müssen, wenn auch noch die Größen  $\sigma_p$  in dieser Gleichung für  $p = 1, 2 \dots$  bis  $n$  reell sind, können ohne weiteres angegeben werden. Was die Konvergenz der in Gl. (5) auftretenden unendlichen Reihe anbetrifft, so entspricht sie der absoluten Konvergenz der Reihe

$$\sum_q (1/\tau_q)^2 \approx \sum_q (1/q)^2.$$

In Gl. (5) stellt bis auf unwesentliche Konstanten die linke Seite den Beitrag des Feldes der ungedämpften Hohlleiterwelle mit der Grenzwellenlänge  $\lambda_g^{(1)}$  zu der Forderung  $E_\varphi(a, \pm (1 - d/L))$  dar. Sie sollte nach der eingangs gemachten Annahme die einzige Welle sein,

die als wesentlich dämpfungsfreie Welle überhaupt im Hohlleiter existiert. Die rechte Seite entspricht dem Beitrag der unendlich vielen anderen Wellen vom Typus der  $H_{0n}$ -Wellen mit  $n = 2, 3, 4 \dots$ . Ihr Einfluß geht wegen der außerordentlich starken Dämpfung dieser Wellen nur wenig über die unmittelbare Umgebung ihrer einzelnen Erzeugungsstellen hinaus: Das sind aber die vollkommen leitenden Ringe in den Ebenen  $z = (2n + 1) \cdot L$  für  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Daß dieses verschiedenartige Verhalten auch eine verschiedene Bewertung der zugehörigen Feldanteile erfordert, hat nichts Überraschendes.

Unter diesen Umständen ist es nicht ohne Reiz, die eben erhaltenen Ergebnisse mit denen zu vergleichen, die sich wie vordem im Falle einer gleichartigen Anordnung von vollkommen leitenden Ringen, aber bei Fortfall der Außenhülle des Hohlleiters einstellen. Allerdings darf man die für diesen Übergang notwendige Grenzwertberechnung, die entsprechend der Annahme  $b \rightarrow \infty$  vor sich gehen muß, nicht etwa in der Gl. 3(9) vollziehen, sondern es muß dies an der Gl. 3(4a) geschehen. Im Hinblick auf die Gl. 3(2c) entfließt dann sofort aus der Gl. 3(4a) neuerdings die Forderung, daß, um die Komponente  $E_\varphi(a, \pm(L - d))$  für  $b \rightarrow \infty$  zum Verschwinden zu bringen, jetzt die Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi n \frac{d}{L}\right)}{\cos\left(\pi n \frac{a}{L}\right)} \cdot I_1\left(\frac{a}{b} w_n\right) \cdot K_1\left(\frac{a}{L} w_n\right) = 0, \tag{6}$$

$$w_n^2/\pi^2 = (n + \beta L)^2 - (2L/\lambda_0)^2 \tag{6a}$$

sein muß. Nun errechnet sich mittels der DEBYESchen Näherungen für kleine reelle Werte von  $\nu$ , aber großen reellen Werten von  $x$  die Näherungsformel

$$I_\nu(x) K_\nu(x) \sim \frac{1}{2x \cdot \text{Erf} \alpha} \cdot \left\{ 1 - \frac{4 \sin^2 \alpha - 1}{8x^2 \cdot \text{Erf}^6 \alpha} \pm \dots \right\} \quad (\sin \alpha = \nu/x). \tag{7a}$$

Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung für  $\alpha$  kann sie auch in der Form

$$I_\nu(x) K_\nu(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \frac{1}{16\sqrt{x^2 + \nu^2}^3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\nu^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}^5} + \dots \tag{7b}$$

geschrieben werden. Die Wurzeln sind in dieser Gleichung alle positiv zu nehmen, und auch die Größe  $w_n$  selbst ist wie früher stets größer als Null. Die Güte der durch Gl. (7b) erzielten Annäherung bei alleiniger Berücksichtigung des ersten Gliedes in (7b) läßt Tabelle 1 erkennen.

Tabelle 1

$x$	$I_1(x) \cdot K_1(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$
0	0,500000	0,500000
0,25	0,470611	0,485071
0,5	0,427187	0,447213
1,0	0,340173	0,353553
1,5	0,272302	0,277350
2,0	0,222476	0,223606
2,5	0,185962	0,185695
3,0	0,158753	0,158114
3,5	0,138014	0,137361
4,0	0,121832	0,121268
4,5	0,108926	0,108465
5,0	0,098428	0,098058
5,5	0,089739	0,089443
6,0	0,082439	0,082199
6,5	0,076223	0,076029
7,0	0,070870	0,070711
7,5	0,066214	0,066082
8,0	0,062128	0,062017
8,5	0,058514	0,058421
9,0	0,055295	0,055522
9,5	0,052410	0,052342
10,0	0,049811	0,049752



Die Reihe (6) ist im übrigen nur deshalb konvergent, weil der sin oder der cos bei der Berechnung der Reihensumme Vorzeichenwechsel bewirken. Setzt man den Ausdruck (7b) in Gl. (6) ein, so besteht nunmehr für  $\beta$  die Berechnungsvorschrift:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n d/L)}{\cos} \cdot \left[ (\beta L + n)^2 + \left( \frac{L}{\pi a} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{-1/2} = 0. \quad (8)$$

Während also im jetzigen Fall das Nullsetzen von  $d$  die Bestimmungsgleichung (8) für  $\beta$  unbrauchbar machen würde, ist die Größe von  $d$  in der früheren Gl. (5) von geringerem Einfluß; nur darf sie allerdings wegen des rechten Faktors unter dem Summenzeichen auf der rechten Gleichungsseite auch nicht gerade verschwinden.

Die Auflösung der Gl. (8) nach  $\beta L$  ist immer noch recht schwierig. Nur in dem besonderen Falle, daß die der Schwingungsfrequenz entsprechende freie Raumwellenlänge  $\lambda_0 = 2\pi a$  ist, läßt sich die gesuchte Größe  $\beta L$  bei kleinen Werten von  $d/L$  mit einem relativ geringen Aufwand an Mühe berechnen. Die Forderung (8) nimmt nämlich in diesem Falle die Form an:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-in\alpha}}{|n + \beta L|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+in\alpha}}{|n - \beta L|} = -e^{i\alpha(p+1)} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha v}}{v - (p+1 - \beta L)} + e^{i\alpha p} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{+i\alpha v}}{v - (\beta L - p)} \quad (9)$$

$$\left( \alpha = \pi \cdot \frac{d}{L}; \quad p < \beta L < p+1; \quad p = 0, 1, 2, 3 \dots \right).$$

Benutzt man an dieser Stelle die in der Arbeit [9] des Verfassers hergeleitete Formel, so erhält man

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{|n - \beta L|} = -e^{i\pi d\beta} \left[ g(\beta L; \alpha; p) + \pi \cdot \operatorname{ctg}(\pi \beta L) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^\lambda}{\lambda!} \zeta(1-\lambda; 1-\beta L + p) \right] \\ + e^{-i\pi d\beta + 2\pi i \cdot \frac{d}{L}(1+p)} \left[ + g(\beta L; \alpha; \beta) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^\lambda}{\lambda!} \zeta(1-\lambda; -p + \beta L) \right] \quad (10)$$

$$\left( p < \beta L < p+1; \quad \alpha = \pi \cdot d/L; \quad \zeta(s, z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (z + \lambda)^{-s} \quad \text{mit} \quad \Re(s) > 1; \quad \Psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} \right)$$

mit der Erklärungsgleichung

$$g(\beta L; \alpha; p) = 0,577216 + \Psi(\beta L - p) + \ln \alpha. \quad (10a)$$

Da nun  $\zeta(0, z) = \frac{1}{2} - z$  ist, so kann mit Hilfe dieser Gleichung, wenn alle höhere Potenzen von  $\alpha$  außer der ersten vernachlässigt werden, in der Tat eine relativ bequeme Berechnung von  $L\beta$  erfolgen.

### Literatur

- [1] BUCHHOLZ, H.: Gekoppelte Strahlungsfelder im kreiszylindrischen Hohlleiter. Ann. Phys., 5. Folge 39 (1941) S. 81—127. — [2] BUCHHOLZ, H.: Ultrakurzwellen in konzentrischen Kabeln und die Hohlraumresonatoren in Form von Kreislochscheiben. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik Bd. 54 (1939) S. 161—173. — [3] FEUER, P., u. E. S. AKELEY: Scattering of Electromagnetic Radiation by a Thin circular Ring in a circular Wave Guide. Journ. Appl. Phys. Bd. 19 (1948) S. 39—47. (Hier steht die Fläche des Ringes in einer Ebene  $z = \text{const.}$ ) — [4] KONYOUMJAN, R. L.: The Backscattering from a circular loop, S. 17. Appl. Sci. Research Bd. B 6 (1956) S. 165—179. — [5] WATKINS, D. A.: Topics in Electromagnetic Theory. New York, London: J. Wiley 1958. — [6] PHILIPSON, L. L.: An analytical Study of Scattering by thin Dielectric Rings. IRE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP-6 (1958) S. 3—8. — [7] SENGUPTA, D. L.: On the Phase Velocity of Wave Propagation along an infinite Yagi Structure. IRE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP-7 (1959) S. 234—239. — [8] BUCHHOLZ, H.: Eine einfache Reihentransformation bei einer sehr allgemeinen Fourierschen Reihe. ZAMM Bd. 22 (1942) S. 221—285.

Prof. Dr.-Ing. H. BUCHHOLZ, Technische Hochschule Darmstadt,  
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik

# Analytische Darstellung der Kennlinien nichtlinearer Zweipole

Von

WALTER BÖNING

(Mitteilung aus dem Rogowski-Institut für Elektrotechnik  
der Technischen Hochschule Aachen)

Mit 14 Textabbildungen

(Eingegangen am 21. Januar 1960)

**Übersicht:** Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung der Konstanten verschiedener einfacher „Ersatzfunktionen“ für nichtlineare Kennlinien eines bestimmten Typs. Die hier angewandten rechnerischen Verfahren, insbesondere die normierten Diagramme für die Konstanten der logarithmischen, der area sinus- und der arcus tangens-Ersatzfunktion stellen eine Ergänzung der in der Arbeit von FISCHER und MOSER [1] gezeigten zeichnerischen Verfahren dar. Die Auswahl der behandelten Ersatzfunktionen wurde vor allem im Hinblick auf ihre Verwendung in den Differentialgleichungen nichtlinearer Stromkreise getroffen.

## 1. Aufgabenstellung

Ein großer Teil der in der Elektrotechnik verwendeten nichtlinearen Schaltelemente besitzt eine Kennlinie der Form, wie sie in Bild 1 gezeichnet ist.

Wir haben hier vorläufig die Koordinaten allgemein mit  $x$  und  $y$  bezeichnet. Bezüglich der Lage der Achsen müssen einige Vereinbarungen getroffen werden. Die in Bild 1 gezeigte Kurve hat die Eigenschaft, sich mit zunehmenden Werten der Abszisse  $x$  asymptotisch einer Geraden zu nähern; sie hat dabei durchweg eine positive erste Ableitung, jedoch eine negative zweite Ableitung. Die Kurve wird daher von „oben“ betrachtet konvex. Die Asymptote hat in vielen praktisch vorkommenden Fällen einen verschwindend kleinen Anstieg. Man kann in solchen Fällen sagen, daß sich die Größe  $y$  einem Sättigungswert nähert. Wir wollen von vornherein verabreden, die Kennlinien der im Folgenden behandelten nichtlinearen Zweipole so zu zeichnen, daß die entstehende Kurve die hier erwähnten Eigenschaften hat. Oder etwas ungenauer ausgedrückt: Wir wollen diejenige Größe, die einem Sättigungswert zustrebt, stets auf der senkrechten Achse abtragen.

Die folgenden Betrachtungen seien ferner auf Kennlinien des oben geschilderten Verlaufs beschränkt. Insbesondere sollen Kennlinien mit stückweise negativem Anstieg hier nicht behandelt werden.

Die allgemeinen Koordinaten  $x$  und  $y$  werden wir weiter unten bei den Anwendungsbeispielen durch die jeweiligen physikalischen Größen ersetzen, so z. B. bei der Strom-Spannungskennlinie eines Halbleiters die Abszisse  $x$  durch den Strom  $i$ , die Ordinate  $y$  durch die Spannung  $u$  am Halbleiter. Umgekehrt liefert die in Bild 1 dargestellte Kurve die Anodenspannungs-Anodenstromkennlinie einer Pentode, wenn man  $x$  durch die Anodenspannung  $u_a$  und  $y$  durch den Anodenstrom  $i_a$  ersetzt. Bei Vernachlässigung der Hysterese stellt ferner die Kurve des Bildes 1 der Gestalt nach den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und der Induktion eines eisenhaltigen magnetischen Kreises dar. Man erhält die entsprechende Kennlinie, indem man die Abszissendifferenzen der Äste der Hystereseschleife halbiert. Die entstehende Kurve heißt Mittelkurve. Sie deckt sich im Wesentlichen mit der Neukurve des Kreises, mit Ausnahme kleiner Induktionswerte. In vielen Fällen läßt sich bei der Behandlung nichtlinearer Kreise die Hystereseschleife ohne allzugroße Ungenauigkeit durch die Mittelkurve ersetzen.

Unsere Aufgabe besteht nun in der möglichst guten Annäherung von gemessenen Zusammenhängen nach Bild 1 durch analytische Funktionen, im Folgenden kurz Ersatzfunktionen genannt. Mit Hilfe dieser Ersatzfunktionen lassen sich Differentialgleichungen

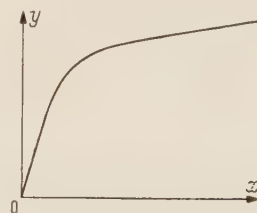


Bild 1. Kennlinie der wichtigsten nichtlinearen Zweipole in allgemeinen Variablen.



nichtlinearer Stromkreise aufstellen, die mit den Mitteln der Analysis zumindest angenähert zu lösen sind. Daraus ergibt sich unmittelbar die Forderung nach möglichst weitgehender mathematischer Einfachheit der Ersatzfunktion. Einerseits ist es ohne weiteres möglich, eine empirisch gegebene Kurve nach einem der bekannten Interpolationsverfahren beliebig genau durch ein Polynom anzunähern. Andererseits werden aber die so gewonnenen Ausdrücke im Hinblick auf die später zu bewältigende Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung viel zu verwickelt. Wir werden daher unsere Ersatzfunktionen in Gestalt einiger ganz einfacher algebraischer und transzendenter Ansätze wählen. An praktischen Beispielen soll gezeigt werden, daß dennoch die Güte der Annäherung in den meisten Fällen befriedigend ist.

## 2. Ersatz durch ein zweigliedriges Polynom

Wir untersuchen zwecks Annäherung einer vorgelegten Kennlinie den Ausdruck

$$\frac{x}{x_b} = \frac{y}{y_b} + \left( \frac{y}{y_b} \right)^{2n+1}, \quad (1)$$

worin  $n > 0$  eine ganze positive Zahl sei. Nach Angabe dieser Zahl  $n$  enthält Gl. (1) noch zwei Bezugsgrößen  $x_b$  und  $y_b$ , die mit Hilfe der gegebenen Kennlinie bestimmt werden sollen. Dazu fordern wir, daß die Ableitung im Nullpunkt  $y'|_{x=0} = m_0$  sowie ein Kurvenpunkt der Ersatzfunktion mit den Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$  mit den entsprechenden Werten der gegebenen Kennlinie übereinstimmen. Differenzieren von Gl. (1) liefert

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=0} = \frac{1}{m_0} = \frac{x_b}{y_b}, \quad \text{oder} \quad m_0 = \frac{y_b}{x_b}. \quad (2)$$

Außerdem gilt für das gegebene Wertepaar  $x_1, y_1$ :

$$\frac{x_1}{x_b} = \frac{y_1}{y_b} + \left( \frac{y_1}{y_b} \right)^{2n+1}, \quad (3)$$

oder mit (2):

$$x_1 = \frac{y_1}{m_0} \left[ 1 + \left( \frac{y_1}{y_b} \right)^{2n} \right].$$

Daraus kommt mit der Abkürzung  $\frac{y_1}{x_1} = m_1$  für die gesuchte Konstante  $y_b$ :

$$y_b = \frac{y_1}{\sqrt[2n]{\frac{m_0}{m_1} - 1}}. \quad (4)$$

Die zweite Konstante  $x_b$  bestimmt man anschließend leicht aus Gl. (2):

$$x_b = \frac{y_b}{m_0}. \quad (5)$$

Setzt man im Exponenten der Gl. (1) im einfachsten Fall  $n = 1$ , so erhält man als Ersatzfunktion eine kubische Parabel. Diese liefert jedoch nur dann eine befriedigende Annäherung, wenn entweder die vorgelegte Kennlinie genügend schwach gekrümmt ist, oder die Annäherung nur im Bereich geringer Aussteuerung erfolgen soll. Schon für  $n = 2$  (Kurve fünften Grades) ist dagegen die Annäherung auch in weiten Bereichen recht gut.

Die Ersatzfunktion (1) ist eine ungerade Funktion; sie ist symmetrisch zum Nullpunkt und liefert daher für negative Werte von  $y$  den Verlauf der Kennlinie im dritten Quadranten, falls auch die Kennlinie eine ungerade Funktion ist (Beispiele: Magnetische Kennlinie, Strom-Spannungskennlinie eines Halbleiter-Widerstandes). Der Ausdruck (1) läßt sich dabei für Gleich- und Wechselstromkreise verwenden.

Als Beispiel für die Anwendung der Ersatzfunktion (1) soll die in Bild 2 gezeigte Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes durch eine kubische Parabel gemäß (1) dargestellt werden.

Die Ersatzfunktion lautet, indem wir in der allgemeinen Gleichung (1) die Abszisse  $x$  durch den Strom  $i$  und die Ordinate  $y$  durch die Spannung  $u$  ersetzen:

$$\frac{i}{i_b} = \frac{u}{u_b} + \left(\frac{u}{u_b}\right)^3 = \frac{u}{u_b} \left(1 + \frac{u^2}{u_b^2}\right). \quad (6)$$

Der Anfangsanstieg der Kennlinie beträgt etwa  $m_0 = 250 \text{ k}\Omega$ . Wir wählen den Punkt mit  $i_1 = 3 \text{ mA}$ ;  $u_1 = 44 \text{ V}$ ;  $m_1 = 14,67 \text{ k}\Omega$ , in dem die Ersatzfunktion mit der gemessenen Kennlinie übereinstimmen soll. Nach Gl. (4) und (5) erhält man dann mit  $n = 1$

$$u_b = 11 \text{ V}, \quad i_b = 0,044 \text{ mA}.$$

Damit lautet unsere Ersatzfunktion nach Einsetzen dieser Werte in (6):

$$\frac{i}{\text{mA}} = 0,004 \frac{u}{\text{V}} \left[1 + 0,00827 \left(\frac{u}{\text{V}}\right)^2\right]. \quad (6a)$$

In Bild 2 sind einige Punkte dieser Funktion zum Vergleich mit der gegebenen Kurve eingetragen. Die Annäherung ist unbefriedigend. Insbesondere kann die kubische Parabel der Krümmung der Kennlinie nicht folgen.

Wir setzen daher in Gl. (1)  $n = 2$ , betrachten also die Ersatzfunktion

$$\frac{i}{i_b} = \frac{u}{u_b} + \left(\frac{u}{u_b}\right)^5 = \frac{u}{u_b} \left(1 + \frac{u^4}{u_b^4}\right). \quad (7)$$

Hierfür erhält man aus (4) und (5)

$$u_b = 22 \text{ V}; \quad i_b = 0,088 \text{ mA}$$

und damit nach Einsetzen in (7):

$$\frac{i}{\text{mA}} = 0,004 \cdot \frac{u}{\text{V}} \cdot \left[1 + 4,27 \cdot 10^{-6} \left(\frac{u}{\text{V}}\right)^4\right]. \quad (7a)$$

Wie die in Bild 2 eingetragenen Punkte zeigen, ist die Annäherung durch diese Funktion fünften Grades bereits recht gut.

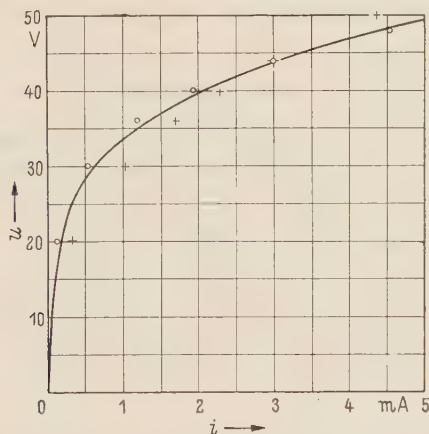


Bild 2. Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes. Die eingetragenen Kreuze sind Punkte der Ersatzfunktion Gl. (6a), die kleinen Kreise sind Punkte der Ersatzfunktion (7a).

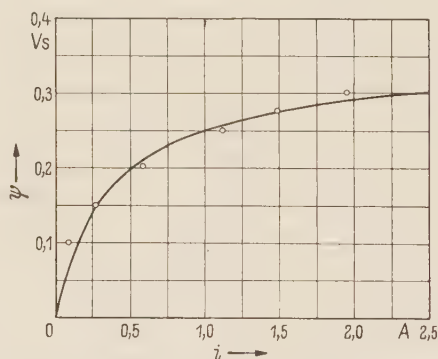


Bild 3. Magnetische Kennlinie einer Spule mit Dynamoblechkern. Die eingetragenen Punkte sind Punkte der Ersatzfunktion Gl. (8a).

Für die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung bedeutet jedoch das Auftreten einer Funktion fünften Grades gegenüber derjenigen dritten Grades eine außerordentliche Erschwerung.

Oft kann man die Annäherung durch die kubische Parabel verbessern, indem man als Anfangsanstieg der Ersatzfunktion einen größeren Wert wählt, als es dem Anstieg der wiederzugebenden Kennlinie entspricht. Als Beispiel zeigt Bild 3 die magnetische Kennlinie  $\Psi = f(i)$  einer Spule mit Dynamoblechkern (Mittelkurve). Die Ersatzfunktion (1) lautet hier mit  $n = 1$ :

$$\frac{i}{i_b} = \frac{\Psi}{\Psi_b} + \left(\frac{\Psi}{\Psi_b}\right)^3. \quad (8)$$

Der Anstieg der Kennlinie im Nullpunkt beträgt etwa 0,8 H. Wir nehmen statt dessen  $m_0 = 10$  H und dazu den Punkt  $i_1 = 1,5$  A;  $\Psi_1 = 0,275$  Vs, in dem die gegebene Kennlinie mit der Kurve (8) übereinstimmen soll. Man erhält damit

$$\Psi_b = 0,0376 \text{ Vs}; \quad i_b = 0,00376 \text{ A}.$$

Nach Einsetzen in (8) kommt

$$\frac{i}{A} = 0,1 \frac{\Psi}{Vs} \left[ 1 + 708 \left( \frac{\Psi}{Vs} \right)^2 \right]. \quad (8a)$$

In Bild 3 sind einige Punkte der kubischen Parabel (8a) eingetragen. Die Abweichungen von der gegebenen Kennlinie sind geringer als bei den Punkten der kubischen Parabel in Bild 2.

### 3. Ersatz durch Hyperbeln

Eine sehr gute Annäherung einer vorgegebenen Kennlinie der hier betrachteten Art läßt sich erreichen durch den Ausdruck

$$y = \frac{a x}{b + x} + c x. \quad (9)$$

Die Funktion (9) hat allerdings den Nachteil, daß sie nicht symmetrisch zum Nullpunkt ist. Sie liefert bei gleichbleibenden Werten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nur eine Annäherung in einem Quadranten und läßt sich daher nicht für Aussteuerungen der Kennlinie beiderseits des Nullpunkts verwenden.

Gl. (9) stellt eine Hyperbel dar, die durch den Nullpunkt geht und die Gerade  $y = a + c x$  zur Asymptote hat. Sie enthält drei Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , welche an Hand der gegebenen Kennlinie zu bestimmen sind. Dazu fordern wir Übereinstimmung in drei von Null verschiedenen Punkten der Kennlinie. Die drei Punkte mögen die Koordinaten  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  und  $(x_3; y_3)$  haben. Wir schreiben Gl. (9) zunächst in der Form

$$-b \frac{y}{x} + c x + (a + b c) = y \quad (10)$$

und setzen abkürzend

$$a + b c = q. \quad (11)$$

Zur Bestimmung der drei Konstanten  $b$ ,  $c$  und  $q$  haben wir dann mit der weiteren Abkürzung

$$\frac{y_v}{x_v} = k, \quad (11a)$$

das lineare System:

$$\left. \begin{aligned} -k_1 b + x_1 c + q &= y_1, \\ -k_2 b + x_2 c + q &= y_2, \\ -k_3 b + x_3 c + q &= y_3, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

mit den Lösungen

$$b = \frac{y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)}{x_1 (k_2 - k_3) + x_2 (k_3 - k_1) + x_3 (k_1 - k_2)}, \quad (13)$$

$$c = \frac{y_1 (k_2 - k_3) + y_2 (k_3 - k_1) + y_3 (k_1 - k_2)}{x_1 (k_2 - k_3) + x_2 (k_3 - k_1) + x_3 (k_1 - k_2)}, \quad (14)$$

$$q = \frac{y_1 (x_2 k_3 - x_3 k_2) + y_2 (x_3 k_1 - x_1 k_3) + y_3 (x_1 k_2 - x_2 k_1)}{x_1 (k_2 - k_3) + x_2 (k_3 - k_1) + x_3 (k_1 - k_2)}. \quad (15)$$

Die Konstante  $a$  bestimmt man anschließend leicht aus Gl. (11).

Als Beispiel betrachten wir die Annäherung der Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes (Bild 4). Die Ersatzfunktion lautet hier

$$u = \frac{a i}{b + i} + c i. \quad (16)$$



Wir wählen die drei Kennlinienpunkte

$$\begin{aligned} i_1 &= 2,5 \text{ mA}, & i_2 &= 10 \text{ mA}, & i_3 &= 50 \text{ mA}, \\ u_1 &= 30 \text{ V}, & u_2 &= 41 \text{ V}, & u_3 &= 60 \text{ V}, \\ k_1 &= 12 \text{ k}\Omega, & k_2 &= 4,1 \text{ k}\Omega, & k_3 &= 1,2 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Aus den Gln. (11) bis (15) erhält man, indem man  $x$  durch  $i$  und  $y$  durch  $u$  ersetzt:

$$a = 41 \text{ V}, \quad b = 1 \text{ mA}, \quad c = 0,4 \text{ k}\Omega.$$

Einige Punkte der dadurch festgelegten Hyperbel (16) sind in Bild 4 eingetragen. Sie liegen sehr dicht an der gegebenen Kennlinie.

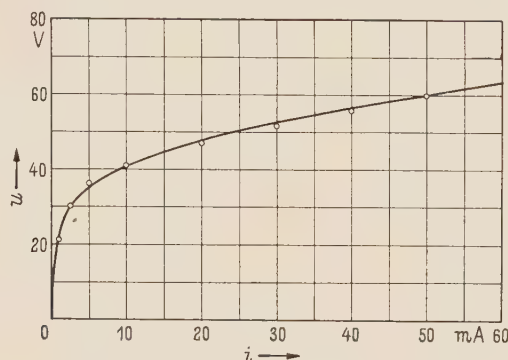


Bild 4. Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes.  
 Die eingetragenen Punkte sind Punkte der Ersatzfunktion (16) mit  $a = 41 \text{ V}$ ,  $b = 1 \text{ mA}$ ,  $c = 0,4 \text{ k}\Omega$

#### 4. Ersatz durch eine Potenz mit gebrochenem Exponenten

Zur Darstellung der Kennlinie des Bildes 1 machen wir jetzt den Ansatz

$$y = k x^\beta \quad (\beta > 0) \quad (17)$$

und geben zwei Punkte  $(x_1; y_1)$  und  $(x_2; y_2)$  der Kennlinie zur Bestimmung der Konstanten  $k$  und  $\beta$  vor. Dann gilt mit

$$y_1 = k x_1^\beta; \quad y_2 = k x_2^\beta, \quad (18)$$

nach Division und logarithmieren:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \beta \cdot \log \frac{x_2}{x_1}$$

und daraus sofort

$$\beta = \frac{\log \frac{y_2}{y_1}}{\log \frac{x_2}{x_1}}. \quad (19)$$

Anschließend hat man aus (18) für die Konstante  $k$ :

$$k = \frac{y_1}{x_1^\beta} = \frac{y_2}{x_2^\beta}. \quad (20)$$

Der Ausdruck (17) liefert für beliebiges positives  $\beta$  nur eine Annäherung im ersten Quadranten, ist also für Wechselstromkreise im allgemeinen nicht geeignet.

Mit der Funktion (17) gelingt besonders gut die Nachbildung der Kennlinien von Halbleiter-Widerständen. Dabei ist stets  $\beta < 1$ . Als Beispiel sei die in Bild 5 gezeichnete Kennlinie vorgelegt. Wir suchen eine Ersatzfunktion der Form

$$u = k i^\beta. \quad (21)$$

Zur Berechnung von  $k$  und  $\beta$  wählen wir die Kennlinienpunkte

$$\begin{aligned} i_1 &= 1 \text{ mA}, & i_2 &= 10 \text{ mA}, \\ u_1 &= 50 \text{ V}, & u_2 &= 80 \text{ V}. \end{aligned}$$

Mit (19) und (20) folgt dann, indem wir  $x$  durch  $i$  und  $y$  durch  $u$  ersetzen:

$$\begin{aligned} \beta &= \log \frac{8}{5} \bigg/ \log 10 = 0,20412 \approx 0,2, \\ k &= u_1 / i_1^{0,2} = 50 \text{ V mA}^{-0,2}, \end{aligned}$$

so daß also die gesuchte Funktion

$$\frac{u}{\text{V}} = 50 \cdot \left( \frac{i}{\text{mA}} \right)^{0,2} \quad (21a)$$

lautet. Einige mittels (21a) berechnete Punkte sind in Bild 5 eingetragen. Man erkennt, daß die Übereinstimmung zwischen Ersatzfunktion und Kennlinie außerordentlich gut ist.

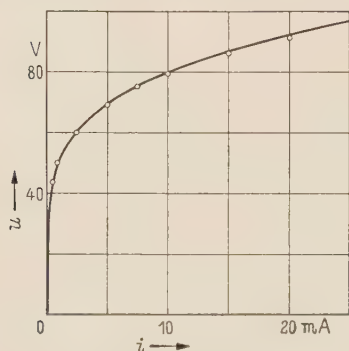


Bild 5. Kennlinie eines Widerstandes vom Halbleitertyp mit Punkten der Funktion (21a).

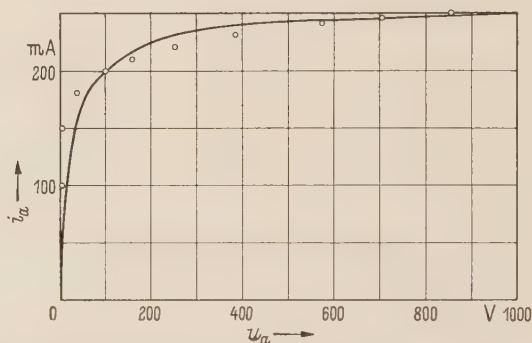


Bild 6. Anodenspannungs-Anodenstromkennlinie einer Sendepentode für bestimmte Werte der Steuergitter- und Schirmgitterspannung. Eingezeichnet sind Punkte der Ersatzfunktion  $u = k i^\beta$  mit  $k = 8,14 \cdot 10^{-21} \text{ V mA}^{-9,6}$  und  $\beta = 9,6$ .

Für  $\beta > 1$  lassen sich mit dem Ausdruck (17) auch Röhrenkennlinien darstellen, jedoch ist die erreichbare Übereinstimmung hierbei im allgemeinen nicht so gut wie bei den Halbleiter-Kennlinien. Bild 6 zeigt als Beispiel die Nachbildung einer Pentoden-Kennlinie.

### 5. Ersatz durch eine logarithmische Funktion

Die in diesem Abschnitt behandelte Ersatzfunktion hat wie die Hyperbel und die soeben behandelte Potenzfunktion den Nachteil, daß sie nur in einem Quadranten brauchbar ist, also bei Aussteuerungen rechts und links vom Nullpunkt versagt, gleichbleibende Werte der Konstanten vorausgesetzt. Ferner liefert sie — ähnlich wie die kubische Parabel unter 2. — nur bei verhältnismäßig schwach gekrümmten Kennlinien eine befriedigende Annäherung. Ihr Vorzug ist jedoch ihre analytische Einfachheit. Sie lautet:

$$\frac{y}{y_b} = \ln \left( 1 + \frac{x}{x_b} \right). \quad (22)$$

Zur Bestimmung der Bezugsgrößen  $x_b$  und  $y_b$  fordern wir die Übereinstimmung mit der gegebenen Kennlinie in zwei von Null verschiedenen Kurvenpunkten  $(x_1; y_1)$  und  $(x_2; y_2)$ , im folgenden kurz „Deckpunkte“ genannt. Wir schreiben damit Gl. (22) als Umkehrfunktion:

$$\frac{x_1}{x_b} = e^{y_1/y_b} - 1, \quad \frac{x_2}{x_b} = e^{y_2/y_b} - 1.$$

Daraus erhält man mit den Abkürzungen

$$\frac{y_1}{y_b} = \varrho; \quad \frac{x_2}{x_1} = k_x; \quad \frac{\hat{y}_2}{y_1} = k_y \quad (23)$$

die beiden Beziehungen

$$x_b = \frac{x_1}{e^{\varrho} - 1}, \quad (24)$$

$$k_x = \frac{e^{\varrho \cdot k_y} - 1}{e^{\varrho} - 1}. \quad (25)$$

Gl. (25) behandeln wir als transzendente Bestimmungsgleichung für die Unbekannte  $\varrho$ , denn aus  $\varrho$  folgt mit (23) die gesuchte Größe  $y_b$  und wegen (24) auch  $x_b$ . Setzt man in (25) für  $k_y$  einen bestimmten Wert ein und berechnet  $k_x$  als Funktion von  $\varrho$ , trägt jedoch  $\varrho$  über  $k_x$  auf, so erhält man eine Kurve, aus der man für einen bestimmten Wertevorrat von  $k_x$  und den festen Wert  $k_y$  die jeweilige Zahl  $\varrho$  entnehmen kann. Läßt man in (25)  $k_y$  nacheinander verschiedene Werte annehmen, so erhält man eine Kurvenschar mit  $k_y$  als Parameter. Eine solche Schar zeigt Bild 7 für den Bereich  $1,5 \leq k_x \leq 10$  und sieben Werte des Parameters  $k_y$ . Mit Hilfe von Bild 7 läßt sich für eine vorgelegte Kennlinie sehr bequem eine Ersatzfunktion der Gestalt (22) ermitteln.

Es sei beispielsweise die magnetische Kennlinie des Bildes 3 durch die Funktion (22) zu ersetzen. Wir wählen die Deckpunkte

$$\begin{aligned} i_1 &= 0,325 \text{ A}, & i_2 &= 1,575 \text{ A}, \\ \Psi_1 &= 0,16 \text{ Vs}, & \Psi_2 &= 0,28 \text{ Vs}. \end{aligned}$$

In den Gleichungen (22) bis (25) ist überall  $x$  durch  $i$  und  $y$  durch  $\Psi$  zu ersetzen. Die Ersatzfunktion lautet:

$$\frac{\Psi}{\Psi_b} = \ln \left( 1 + \frac{i}{i_b} \right). \quad (26)$$

Man hat mit den gegebenen Punktkoordinaten:

$$k_x = \frac{i_2}{i_1} = 4,85; \quad k_y = \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = 1,75.$$

Aus Bild 7 liest man ab:  $\varrho = 1,95 = \frac{\Psi_1}{\Psi_b}$ .

Daraus und aus (24) erhält man schließlich

$$\Psi_b = 0,082 \text{ Vs}; \quad i_b = \frac{i_1}{e^{\varrho} - 1} = 0,0539 \text{ A}.$$

Die Ersatzfunktion (26) ist damit zahlenmäßig bestimmt. In Bild 8 sind die gegebene Kennlinie sowie einige Punkte der Ersatzfunktion zum Vergleich gezeichnet. Die Übereinstimmung im betrachteten Bereich ist befriedigend.

Wir bringen noch ein Beispiel zur logarithmischen Ersatzfunktion. Es sei die in Bild 9 gezeigte dielektrische Kennlinie  $Q = f(u)$  eines nichtlinearen Kondensators durch einen Ausdruck der Form (22) nachzubilden. Man hat sinngemäß:

$$\frac{Q}{Q_b} = \ln \left( 1 + \frac{u}{u_b} \right). \quad (26a)$$

Wir wählen an der gegebenen Kennlinie die Deckpunkte

$$\begin{aligned} u_1 &= 360 \text{ V}, & u_2 &= 1120 \text{ V}, \\ Q_1 &= 10^{-5} \text{ Coul}, & Q_2 &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ Coul} \end{aligned}$$

und haben damit  $k_x = 3,11$ ;  $k_y = 2$ . In Bild 7 liest man ab  $\varrho = 0,75$  und kann daraus leicht berechnen

$$\begin{aligned} Q_b &= \frac{Q_1}{\varrho} = \frac{10^{-5}}{0,75} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ Coul}, \\ u_b &= \frac{u_1}{e^{\varrho} - 1} = \frac{360}{1,117} = 323 \text{ V}. \end{aligned}$$

In Bild 9 sind Kennlinie und Punkte der Ersatzfunktion zum Vergleich zusammen gezeichnet. Wegen der schwachen Krümmung der dielektrischen Kennlinie ist die Übereinstimmung recht gut.



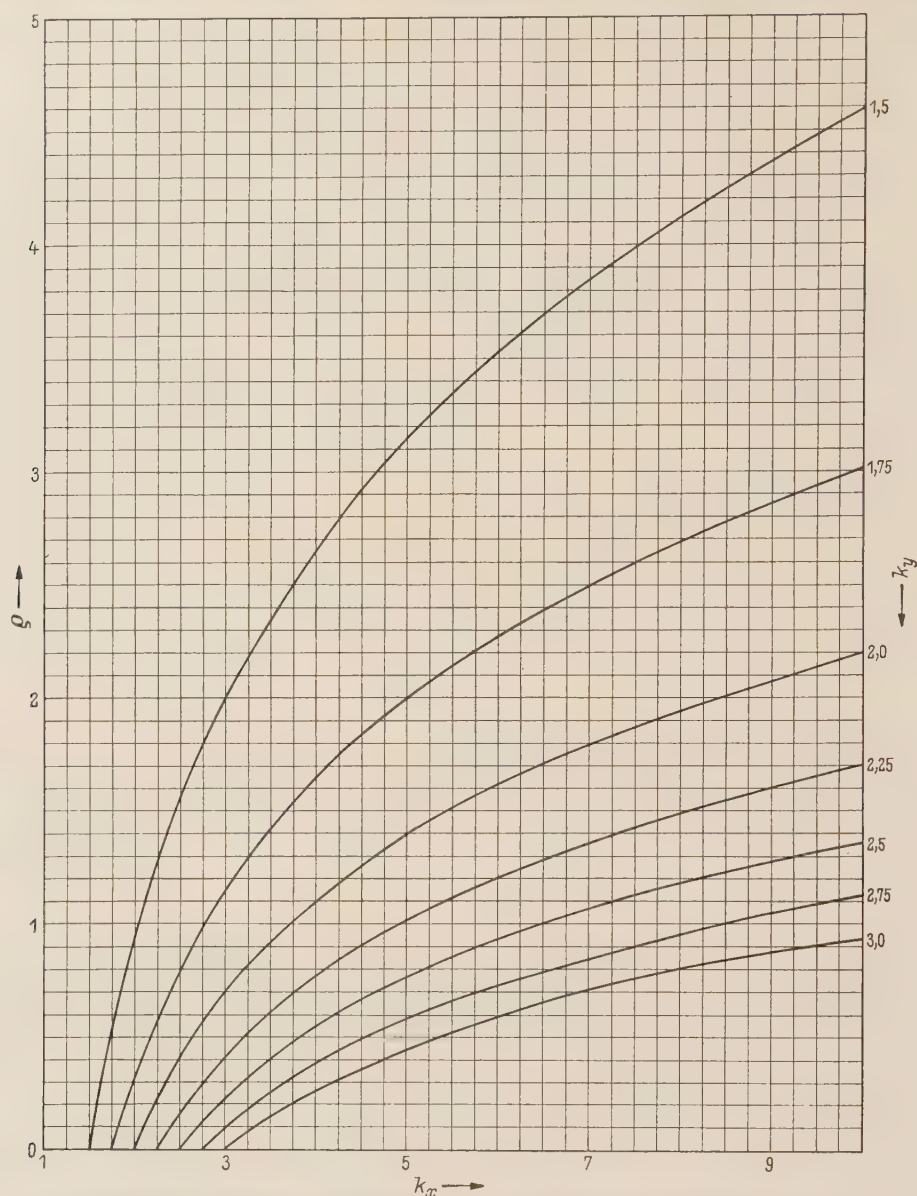


Bild 7. Schaubild zur Ermittlung der Konstanten  $x_b$  und  $y_b$  der logarithmischen Ersatzfunktion Gl. (22).

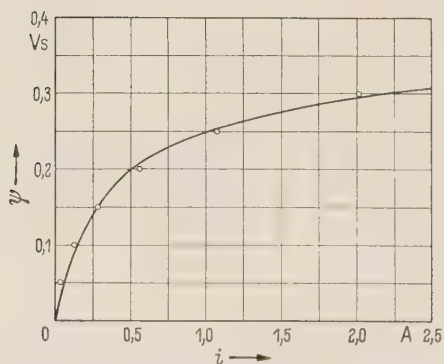


Bild 8. Magnetische Kennlinie einer Spule mit Dynamoblechkern. Die eingetragenen Punkte sind Punkte der Ersatzfunktion (26) mit  $i_b = 0,0539$  A,  $\Psi_b = 0,082$  Vs.

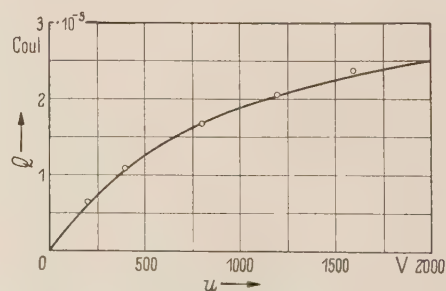


Bild 9. Dielektrische Kennlinie eines Bariumtitanat-Kondensators. Die eingetragenen Punkte sind Punkte der Ersatzfunktion (26a) mit  $u_b = 323$  V  $Q_b = 1,33 \cdot 10^{-5}$  Coul.

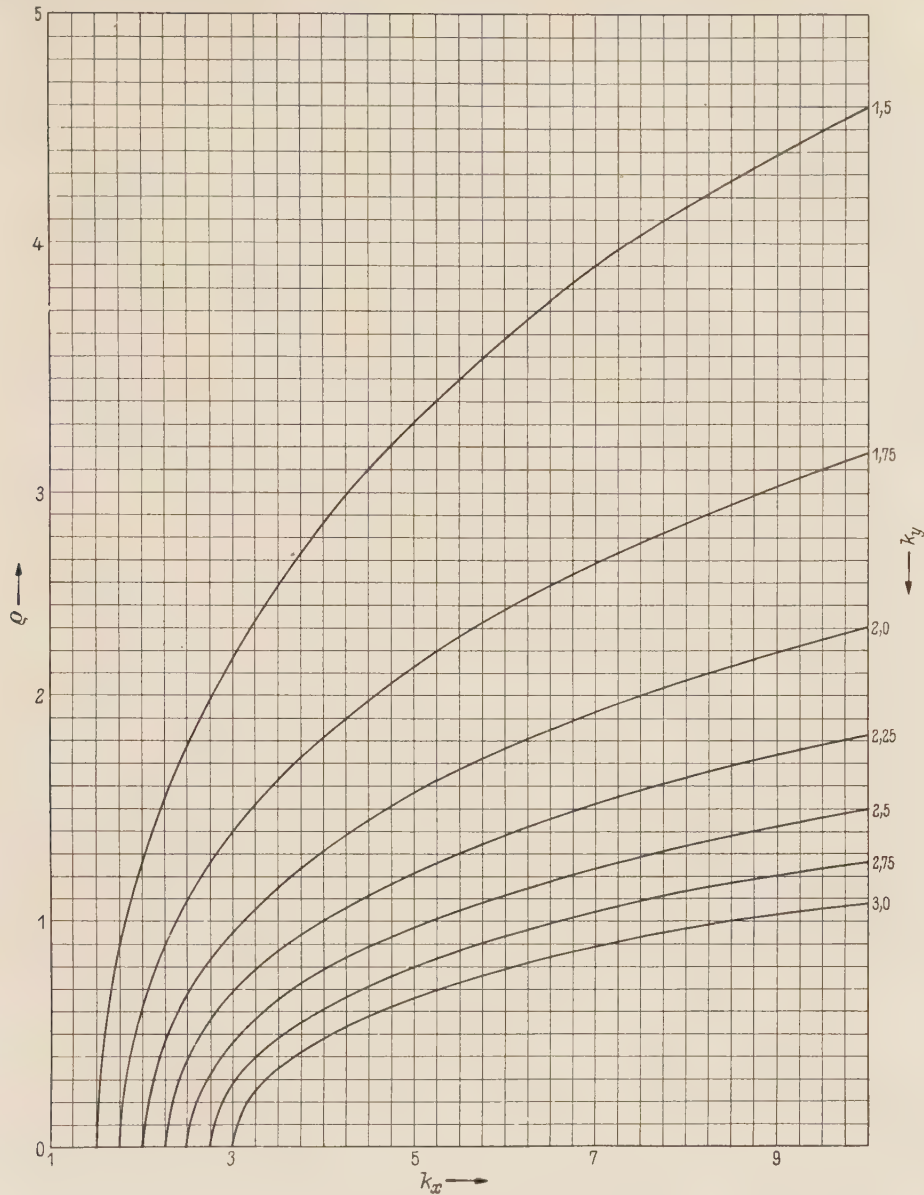


Bild 10. Schaubild zur Ermittlung der Konstanten  $x_b$  und  $y_b$  der Ersatzfunktion area sinus Gl. (27).

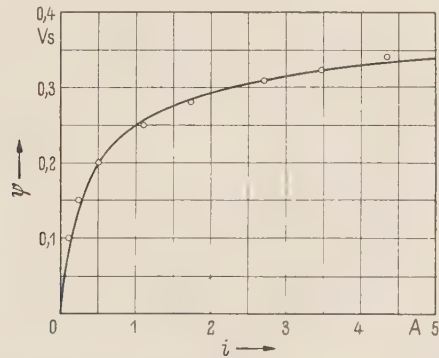


Bild 11. Magnetische Kennlinie einer Spule mit Dynamoblechkern. Zum Vergleich sind einige Punkte der Ersatzfunktion area sinus, Gl. (31), mit  $i_b = 0,0519$  A,  $\Psi_b = 0,0665$  Vs eingetragen.

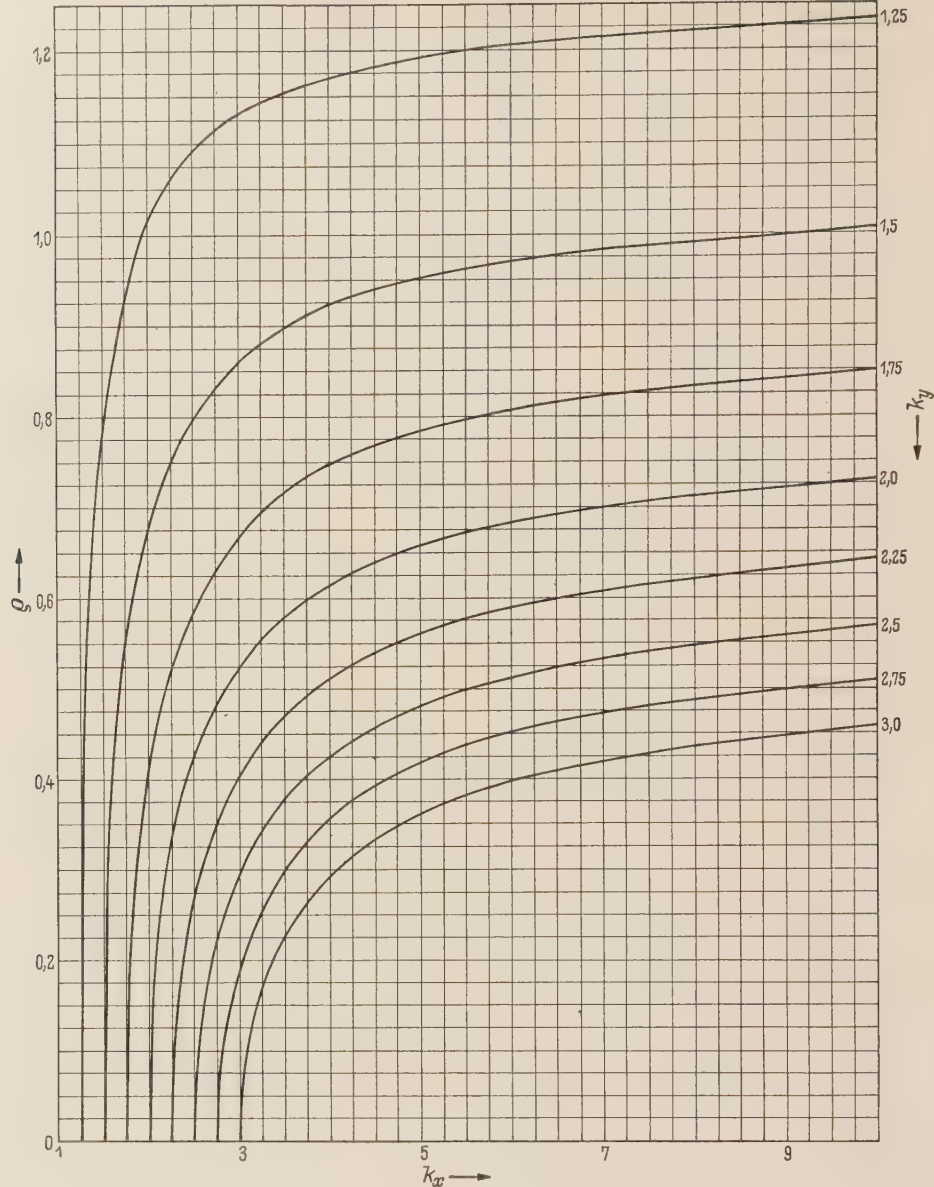


Bild 12. Schaubild zur Ermittlung der Konstanten  $x_b$  und  $y_b$  der Ersatzfunktion arcus tangens, Gl. (32).

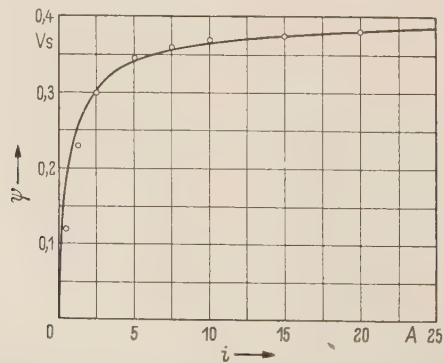


Bild 13. Magnetische Kennlinie einer Spule mit Dynamoblechkern (Mittelkurve). Die eingetragenen Punkte sind Punkte der Ersatzfunktion arcus tangens, Gl. (36), mit  $i_b = 0,97$  A,  $\psi_b = 0,25$  Vs.



## 6. Die Ersatzfunktion $\text{area sinus hyperbolicus}$

Der Ausdruck

$$\frac{y}{y_b} = \text{Ar sinh } \frac{x}{x_b}, \quad (27)$$

eignet sich zur Darstellung einer Kennlinie bis zu größeren Aussteuerungen auch beiderseits des Nullpunkts. Als Bestandteil einer nichtlinearen Differentialgleichung besitzt er oftmals eine bemerkenswerte mathematische Kraft wegen der zahlreichen geltenden Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen.

Zur Bestimmung der Bezugsgrößen  $x_b$  und  $y_b$  schreiben wir (27) in Gestalt der Umkehrfunktion:

$$\frac{x}{x_b} = \sinh \frac{y}{y_b} \quad (28)$$

und wählen wiederum zwei Kennlinienpunkte  $(x_1; y_1)$  und  $(x_2; y_2)$  als Deckpunkte der Ersatzfunktion mit der gegebenen Kennlinie. Aus den Beziehungen

$$\frac{x_1}{x_b} = \sinh \frac{y_1}{y_b}; \quad \frac{x_2}{x_b} = \sinh \frac{y_2}{y_b}$$

folgt

$$x_b = \frac{x_1}{\sinh (y_1/y_b)} = \frac{x_1}{\sinh \varrho} \quad (29)$$

und

$$\frac{x_2}{x_1} = k_x = \frac{\sinh (k_y \varrho)}{\sinh \varrho}, \quad (30)$$

mit den Abkürzungen Gl. (22) des vorigen Abschnitts. Aus Gl. (30) läßt sich ebenso wie oben aus Gl. (25) eine Kurvenschar berechnen, die ein schnelles Auffinden der normierten Größe  $\varrho$  und damit der Konstanten  $x_b$  und  $y_b$  der Funktion (28) ermöglicht. Eine solche Schar ist in Bild 10 gezeichnet.

Beispiel: Die in den Bildern 3 und 8 bereits benutzte magnetische Kennlinie ist in Bild 11 bei größerer Aussteuerung gezeichnet und soll durch die der Gl. (27) entsprechende Funktion

$$\frac{\Psi}{\Psi_b} = \text{Ar sinh } \frac{i}{i_b} \quad (31)$$

wiedergegeben werden. Wir wählen die Deckpunkte

$$\begin{aligned} i_1 &= 0,425 \text{ A}, & i_2 &= 3,5 \text{ A}, \\ \Psi_1 &= 0,186 \text{ Vs}, & \Psi_2 &= 0,325 \text{ Vs} \end{aligned}$$

und bilden gemäß Gl. (23) die Verhältnisse  $k_x = i_2/i_1 = 8,24$ ;  $k_y = \Psi_2/\Psi_1 = 1,75$ . Aus Bild 10 entnimmt man dazu

$$\varrho = \frac{\Psi_1}{\Psi_b} = 2,8$$

und erhält daraus  $\Psi_b = 0,0665 \text{ Vs}$ ;  $i_b = \frac{i_1}{\sinh \varrho} = 0,0519 \text{ A}$ .

Damit liegt die gesuchte Funktion zahlenmäßig fest. Bild 11 zeigt einige Punkte dieser Funktion. Die Übereinstimmung mit der gegebenen Kennlinie ist gut.

## 7. Die Ersatzfunktion $\text{arcus tangens}$

Eine sehr anpassungsfähige Funktion zur Annäherung von Kennlinien der hier betrachteten Art ist die arcus-tangens-Funktion. Sie ist brauchbar beiderseits des Nullpunkts sowohl bei kleinen als auch bei großen Aussteuerungen bis hin zur „Knick-Kennlinie“. Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{y}{y_b} = \text{arc tg } \frac{x}{x_b}, \quad (32)$$

mit den zu bestimmenden Bezugsgrößen  $x_b$  und  $y_b$ . Dazu wählen wir wie oben zwei Kennlinienpunkte  $(x_1; y_1)$  und  $(x_2; y_2)$ . Schreibt man vorübergehend (32) in Gestalt der Umkehrfunktion, so ist also

$$\frac{x_1}{x_b} = \operatorname{tg} \frac{y_1}{y_b}, \quad (33a)$$

$$\frac{x_2}{x_b} = \operatorname{tg} \frac{y_2}{y_b}. \quad (33b)$$

Wir setzen wie in Gl. (23)

$$\frac{y_1}{y_b} = \varrho; \quad \frac{x_2}{x_1} = k_x; \quad \frac{y_2}{y_1} = k_y \quad (23)$$

und haben aus (33a, b):

$$x_b = \frac{x_1}{\operatorname{tg} \varrho}; \quad (34)$$

$$k_x = \frac{\operatorname{tg}(k_y \varrho)}{\operatorname{tg} \varrho}. \quad (35)$$

Die Beziehung (35) ist in Bild 12 für verschiedene Werte des Parameters  $k_y$  dargestellt, wobei  $k_x$  als Abszisse und  $\varrho$  als Ordinate gewählt wurde. Bild 12 gestattet es, für die aus der vorgelegten Kennlinie gegebenen Werte  $k_x$  und  $k_y$  sofort die zugehörige Größe  $\varrho$  zu entnehmen und damit die jeweiligen Konstanten  $x_b$  und  $y_b$  zu bestimmen.

Als Beispiel zeigt Bild 13 die magnetische Kennlinie einer Spule mit Dynamoblechkern bei einer Aussteuerung bis weit in das Sättigungsgebiet. Als Deckpunkte zur Bestimmung der Ersatzfunktion

$$\frac{\Psi}{\Psi_b} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{i}{i_b} \quad (36)$$

wählen wir die Punkte

$$\begin{aligned} i_1 &= 2,5 \text{ A}, & i_2 &= 13,75 \text{ A}, \\ \psi_1 &= 0,3 \text{ Vs}, & \psi_2 &= 0,375 \text{ Vs}, \end{aligned}$$

und erhalten damit  $k_x = \frac{i_2}{i_1} = 5,5$ ;  $k_y = \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = 1,25$ .

Aus Bild 12 findet man

$$\varrho = \frac{\Psi_1}{\Psi_b} = 1,2$$

und daraus wegen Gl. (34) und (35):  $\Psi_b = 0,25 \text{ Vs}$ ;  $i_b = 0,97 \text{ A}$ .

Einige Punkte der so gewonnenen Ersatzfunktion sind in Bild 13 eingetragen. Sie liegen sehr dicht an der gegebenen Kennlinie.

## 8. Berücksichtigung der Hysterese

Bisher haben wir nur eindeutige Kennlinien betrachtet, also solche, bei denen jedem Abszissenwert  $x$  nur ein Ordinatenwert  $y$  zugeordnet war. Insbesondere haben wir im Fall der magnetischen und dielektrischen Kennlinie statt der vollständigen Hystereseschleife nur die Mittelkurve durch unsere Ersatzfunktionen angenähert.

Beim Auftreten von Hysterese ist die Berücksichtigung der vollständigen Kennlinie zur Berechnung nichtlinearer Vorgänge in vielen Fällen nicht möglich, weil der genaue Kennlinienverlauf garnicht bekannt ist. Die Breite der Hystereseschleife, das heißt: der Abstand der Schnittpunkte der beiden Kurvenäste mit der Abszissenachse hängt bekanntlich ab erstens von der Aussteuerung und zweitens von der Frequenz, mit der die Kennlinie durchlaufen wird. Von Änderungen der Temperatur wollen wir übrigens hier absehen. Alle bisherigen und alle folgenden Betrachtungen beziehen sich selbstverständlich auf die Raumtemperatur von  $20^\circ\text{C}$ .

Die Aufstellung einer Ersatzfunktion für die ganze Hystereseschleife oder einen ihrer Äste lohnt sich nur in solchen Fällen, in denen sowohl die Frequenz als auch die Aussteuerung wenigstens angenähert bekannt sind. Bei nicht zu schnellen zeitlichen Änderungen der Variablen kann man mit der sog. statischen Kennlinie arbeiten, das heißt mit der Kennlinie, die bei langsamem Durchlaufen der Veränderlichen gemessen wird, wobei „langsam“ hier „langsam gegenüber allen Zeitkonstanten des Werkstoffs“ bedeutet. Legt man sich bezüglich der Zeitabhängigkeit auf die statische Kennlinie fest, so fehlt zur Kenntnis der Hystereseschleife noch die Kenntnis der Aussteuerung. Diese ist aber oftmals von vornherein bekannt, so z. B. bei Gleichstromkreisen mit nur einem Energiespeicher, in denen der eingeschwungene Zustand sofort angegeben werden kann und kein Überspringen auftritt. Hier kann eine Ersatzfunktion für die Hystereseschleife durchaus lohnend sein.

Nur in seltenen Fällen kann man die ganze Hystereseschleife durch einen einzigen Funktionsausdruck darstellen, z. B. durch eine Ellipse. Meistenteils ist wegen der auftretenden Spitzen für die beiden Äste der Schleife je eine Ersatzfunktion notwendig. In diesem Fall liefern die ungeraden Funktionen unter unseren bisher behandelten Ersatzausdrücken eine befriedigende Annäherung an jeweils einen Ast durch Parallelverschiebung in Abszissenrichtung.

Es soll beispielsweise die vollständige (statische) Kennlinie der Steuerwicklung eines Magnetverstärkers (Bild 14) durch einen analytischen Ausdruck angenähert werden. Wir versuchen zunächst eine Annäherung des rechten Astes im ersten Quadranten durch die parallelverschobene arcus-tangens-Funktion

$$\frac{\Psi}{\Psi_b} = \arctg \frac{i - i_k}{i_b}, \quad (37)$$

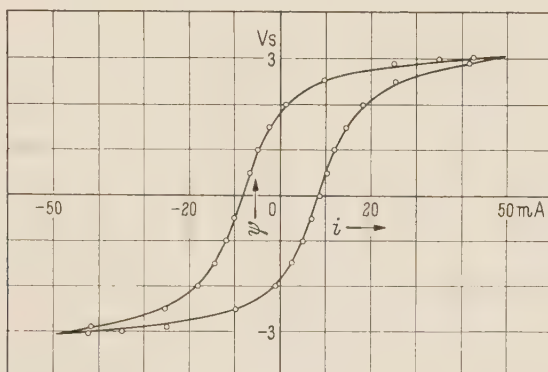


Bild 14. Vollständige magnetische Kennlinie der Steuerwicklung eines Magnetverstärkers, aufgenommen bei 50 Hz. Die eingetragenen Punkte sind Punkte der arc-tg-Ersatzfunktion Gl. (37) mit  $i_k = \pm 8,5$  mA,  $i_b = 7,07$  mA,  $\Psi_b = 2,13$  Vs.

wobei der Index  $k$  an „Koerzitivfeldstärke“ erinnern soll. Wegen  $\Psi = 0$  für  $i = i_k$  in Gl. (37) folgt der Wert von  $i_k$  sofort aus dem Schnittpunkt der Kennlinie mit der positiven Abszissenachse zu  $i_k = 8,5$  mA. Als Deckpunkte wählen wir

$$\begin{aligned} i_1 &= 14,5 \text{ mA}, & i_2 &= 41,5 \text{ mA}, \\ \Psi_1 &= 1,5 \text{ Vs}, & \Psi_2 &= 2,9 \text{ Vs}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von  $i_b$  und  $\Psi_b$  sind auch hier die Hilfskurven Bild 12 verwendbar, wenn wir nur in Gl. (23) und (34) in geringfügiger Änderung schreiben:

$$k_x = \frac{i_2 - i_k}{i_1 - i_k}, \quad (23a)$$

$$i_b = \frac{i_1 - i_k}{\operatorname{tg} \varrho}. \quad (34a)$$



In Bild 12 findet man durch Interpolieren  $\varrho = 0,705$  und daraus:

$$\Psi_b = \frac{\Psi_1}{\varrho} = 2,13 \text{ Vs}; \quad i_b = 7,07 \text{ mA}.$$

Die Ersatzfunktion für den linken Ast der Hystereseschleife bilden wir nun aus (37) durch Parallelverschiebung um den Betrag  $2 i_k$  nach links unter Beibehaltung der oben gefundenen Werte für  $i_b$  und  $\Psi_b$ . Für den linken Ast ist also statt  $i_k = 8,5 \text{ mA}$  lediglich  $i_k = -8,5 \text{ mA}$  in Gl. (37) einzusetzen. Die erhaltenen Ersatzfunktionen lassen sich durch Einsetzen negativer Werte der Veränderlichen  $i$  in den zweiten, dritten und vierten Quadranten fortsetzen. Bild 14 zeigt einige Punkte der Ersatzfunktionen zum Vergleich mit der gegebenen Hystereseschleife. Obwohl wir zur Bestimmung der Bezugsgrößen  $i_b$  und  $\Psi_b$  nur den ersten Quadranten herangezogen hatten, ist die Übereinstimmung über die ganze Kennlinie dank deren Symmetrieeigenschaften überraschend gut.

### 9. Zusammenfassung

Es werden nichtlineare Kennlinien mit monoton ansteigendem Verlauf durch einfache algebraische und transzendente Funktionen ersetzt. Die Auswahl der „Ersatzfunktionen“ erfolgte hauptsächlich im Hinblick auf ihre Eignung bei der Aufstellung nichtlinearer Differentialgleichungen. Die Bestimmung der Konstanten der Ersatzfunktionen wird rein rechnerisch vorgenommen derart, daß bestimmte Punkte oder Richtungen der vorgelegten Kennlinie mit den entsprechenden Größen der gesuchten Funktion übereinstimmen. In den Fällen, in denen diese Forderung auf transzendente Bestimmungsgleichungen führt, werden normierte Schaubilder angegeben, aus denen die gesuchten Zahlenwerte abgelesen werden können.

### Literatur

[1] FISCHER, J., u. H. MOSER: Die Nachbildung von Magnetisierungskurven durch einfache algebraische oder transzendente Funktionen. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 42 (1955/56) S. 286—299.

Dr.-Ing. WALTER BÖNING, Aachen, Stephanstraße 3

# Die Entwicklung der positiven Vorentladungen in Luft zum Durchschlag

Von

WOLFGANG HERMSTEIN

(Mitteilung aus dem Hochspannungsinstitut der Technischen Universität Berlin)

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 3. Dezember 1959)

**Übersicht.** Untersuchungen der positiven Entladungserscheinungen in Luft [1], [2] haben zu aufschlußreichen neuen Erkenntnissen über die von einer Entladung der positiven Elektrode ausgehende Durchschlagentwicklung geführt. In der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen positiven Entladungsarten im Hinblick auf die Entstehung des Durchschlagkanals behandelt.

## 1. Einführung

Im homogenen und quasihomogenen elektrischen Feld tritt der Luftdurchschlag ohne wahrnehmbare Vorentladungen ein. Bei genügend ungleichförmiger Feldausbildung hingegen fallen Anfangs- und Durchschlagspannung nicht mehr zusammen. Das Spannungsintervall zwischen dem Einsetzen der ersten wahrnehmbaren Entladungserscheinung und dem Zünden des Durchschlagfunken vergrößert sich bei konstanter Schlagweite mit zunehmender Inhomogenität des Feldes.

Wenn sich Vorentladungen gebildet haben, wird die folgende Entwicklung zum Durchschlag weitgehend von den Eigenschaften dieser Vorentladungen bestimmt. Das drückt sich schon darin aus, daß die Durchschlagfestigkeit stark von der Entladungspolarität abhängt.

Wenn die Anode so viel stärker als die Kathode gekrümmt ist, daß nur positive Vorentladungen entstehen, so tritt der Durchschlag bei einer niedrigeren Spannung ein als bei entgegengesetzter Polung der Elektroden. Die Hauptursache hierfür ist, daß die Weiterentwicklung einer einmal gezündeten positiven Entladung dadurch gefördert wird, daß die in der Umgebung der Entladung durch kurzweilige Lawinen- und Kanalentladungsstrahlung gebildeten Elektronen durch die Feldkräfte zur Entladungszone hin beschleunigt werden. Außerdem lösen hierbei diese photo-elektrisch erzeugten Elektronen neue Lawinen aus, wenn sie auf ihrem Weg Gebiete genügend hoher Feldstärke durchlaufen, so daß der Hauptentladung dann noch mehr Elektronen zugeführt werden. Daraus ergibt sich auch die bei dieser Polarität feststellbare Neigung zur Bildung weit vorwachsener, stark verzweigter Kanalentladungen. Dagegen streben bei einer negativen Entladung die Elektronen von dieser weg und können, da sie hierbei meist in feldschwaches Gebiet kommen, im allgemeinen nicht stoßionisieren, zumal sie sich dort leicht an neutrale Teilchen anlagern und dadurch schwer bewegliche negative Ionen bilden.

Wenn beide Elektroden gleichzeitig sprühen, so beeinflussen sich die beiden Entladungen gegenseitig. Die von der Anode ausgehende Entladung hat jedoch einen stärkeren Einfluß auf die Durchschlagfestigkeit einer Luftstrecke als die gleichzeitig von der Kathode ausgehende. Auch bei Wechsellastbeanspruchung, wo positive und negative Vorentladungen nach Maßgabe der Netzfrequenz rhythmisch aufeinanderfolgen, wird der Durchschlag fast ausschließlich von einer positiven Vorentladung gezündet, obwohl diese im allgemeinen erst bei einer höheren Spannung einsetzt als die negative. Die Vorgänge, die zur Entwicklung eines positiven Durchschlagkanals führen, sind daher für das Durchschlagverhalten der Luft von grundsätzlicher Bedeutung.

Der positive Durchschlag wird je nach Anodenkrümmung und Elektrodenabstand von der Stromfaden-Entladung, der Glimm-Entladung oder der Büschel-Entladung ausgelöst. In Bild 1 ist für eine konzentrische Kugelanordnung mit konstantem Radius der Hüllkugel ( $R = 10,05 \text{ cm}$ ) angegeben, von welcher Entladungsart bei Gleichspannung in Abhängigkeit vom Radius der positiven Innenkugel der Durchschlagfunke gezündet wird. Bei geringer

Anodenkrümmung entwickelt sich der Durchschlag aus einem Stromfaden, bei stärkerer aus dem Glimmen und bei sehr starker aus einem Büschel. Dazwischen gibt es jeweils ein Übergangsgebiet, wo der Durchschlag sowohl von der Stromfaden- als auch von der Glimm-Entladung bzw. sowohl von der Glimm- als auch von der Büschel-Entladung eingeleitet werden kann<sup>1</sup>.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, den Einfluß der verschiedenartigen positiven Vorentladungen auf die Durchschlagentwicklung zu untersuchen und die Zusammenhänge zu klären. Da die Durchschlagfestigkeit der Luft keine Materialkonstante dieses Isoliermittels ist, sondern vom Feldverlauf abhängt, der seinerseits wieder von der Elektrodenform und dem Elektrodenabstand bestimmt wird und oberhalb der Anfangsspannung außerdem in starkem Maße von den dann vorhandenen Raumladungen beeinflusst ist, sollen zuvor die Grenzen der Luftfestigkeit angegeben werden.

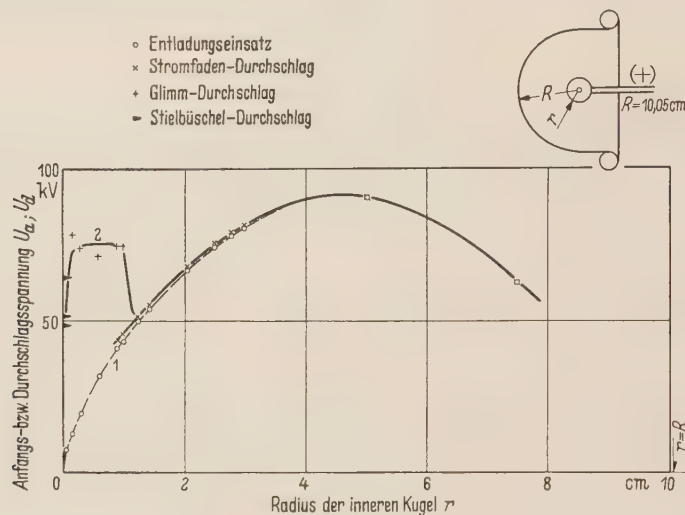


Bild 1. Anfangs- und Durchschlaggleichspannung eines Kugelkondensators in Abhängigkeit vom Radius  $r$  der inneren Kugel für  $R = 10,05$  cm Außenradius. Innere Elektrode positiv.  
Kurve 1 (gestrichelt): Anfangsspannung, Kurve 2 (ausgezogen): Durchschlagspannung.

## 2. Grenzen der Durchschlagfestigkeit von Luft

Im homogenen und auch noch im quasihomogenen Feld findet eine beginnende Entladung überall günstige Ionisierungsbedingungen vor, so daß in sehr kurzer Zeit eine gut leitende Verbindung zwischen den Elektroden aufgebaut wird. Hier fallen daher bei nicht zu kurzer Beanspruchungsdauer Anfangs- und Durchschlagspannung zusammen. Der kritische Spannungswert liegt bei gegebenem Elektrodenabstand um so höher, je gleichmäßiger der isolierende Luftraum beansprucht wird. Aus diesem Grunde weist für jede Schlagweite die Plattenfunkenstrecke von allen technisch möglichen Elektrodenanordnungen die höchste Durchschlagspannung auf (Kurve 1 in Bild 2), für die folgende Beziehung eine gute Näherung darstellt<sup>2</sup>:

$$U_d = 24,5 a + 7\sqrt{a}$$

$U_d$ : Durchschlagspannung in kV,  $a$ : Schlagweite in cm.

Da der Durchschlag im gleichförmigen Feld unabhängig von der Art der Spannungsbeanspruchung stets bei dem gleichen, nur von der Schlagweite abhängigen Spannungswert erfolgt, vorausgesetzt, daß die Einwirkdauer nicht in die Größenordnung der Entladeverzugs-

<sup>1</sup> Zur Ergänzung sei auch auf das Bild 2 der Arbeit [2] des Verfassers verwiesen, wo für verschiedene Kugelradien einer Kugel-Platte-Funkenstrecke in Abhängigkeit von der Schlagweite angegeben ist, von welcher Entladungsart der Durchschlag gezündet wird.

<sup>2</sup> Zusammenstellung der bei ebenen Platten gemessenen Festigkeitswerte z. B. bei B. GÄNGER [3]. Abweichung der Formelwerte von der Mittelwertkurve für Schlagweiten zwischen 0,3 und 16 cm maximal 2%.



zeit kommt<sup>3</sup>, so gibt die Erfahrungsformel einen ganz allgemeinen Anhalt für die obere Grenze der Durchschlagfestigkeit der Luft.

Ein völlig anderes Durchschlagverhalten ist bei Anordnungen mit stärker gekrümmten Elektroden zu beobachten, bei denen also das elektrische Feld ausgesprochen inhomogen ist. In diesem Fall bleiben die Entladungserscheinungen zunächst auf das Gebiet hoher Feldkontraktion beschränkt, da bei den niedrigen Feldstärken im übrigen Gasraum ein weiteres Vorwachsen nicht möglich ist. Erst durch Vergrößerung der Elektrodenspannung kann sich der Teildurchbruch<sup>4</sup> schließlich zum Durchschlag entwickeln. Dieser Vorgang, bei dem die Vorentladungen unter Umständen verschiedene charakteristische Stufen durchlaufen, spielt sich für die beiden Polaritäten unterschiedlich ab. Auch nehmen die einzelnen Entladungsarten in ganz eigener Weise auf die Durchschlagfestigkeit Einfluß.

Eine besonders niedrige Durchschlagspannung ist immer dann zu beobachten, wenn eine positive Vorentladung so stromstark wird, daß Thermoionisation einsetzt, also ein Plasmaschlauch entsteht. Der dann vorhandene, gut leitende Kanal mit fallender Strom-Spannungs-Charakteristik wächst in Richtung auf die Gegenelektrode vor und hat zur Folge, daß die Durchschlagspannung linear mit dem Elektrodenabstand und zwar bei mittlerer Luftfeuchtigkeit nur um etwa 5 kV pro cm Schlagweite zunimmt. Dieses lange, positive Büschel kann sich bei einer Spitze-Platte-Anordnung wegen der dort sehr niedrigen Anfangsspannung und hohen Feldkonzentration besonders gut entwickeln. Aus diesem Grunde geben die Durchschlagswerte der Spitze-Platte-Funkenstrecke für Gleichspannung bei positiver Spitzenpolarität und auch für Wechselspannung, wo ebenfalls das positive Büschel vorherrscht, die untere Grenze der Durchschlagfestigkeit der Luft an (Kurve 2 in Bild 2). Die rückwärtige Verlängerung der Durchschlaggeraden geht ungefähr durch den Koordinatenursprung, so daß überschlägig mit einer spezifischen Mindestdurchschlagspannung der Luft von 5 kV/cm gerechnet werden kann. Lediglich im Gebiet kleiner Schlagweiten liegen die Durchschlagspannungen etwas höher. Sie sind dort noch von der Form der Spitzenelektrode beeinflusst, weil sich bei kleinen Elektrodenabständen keine positiven Büschel entwickeln.

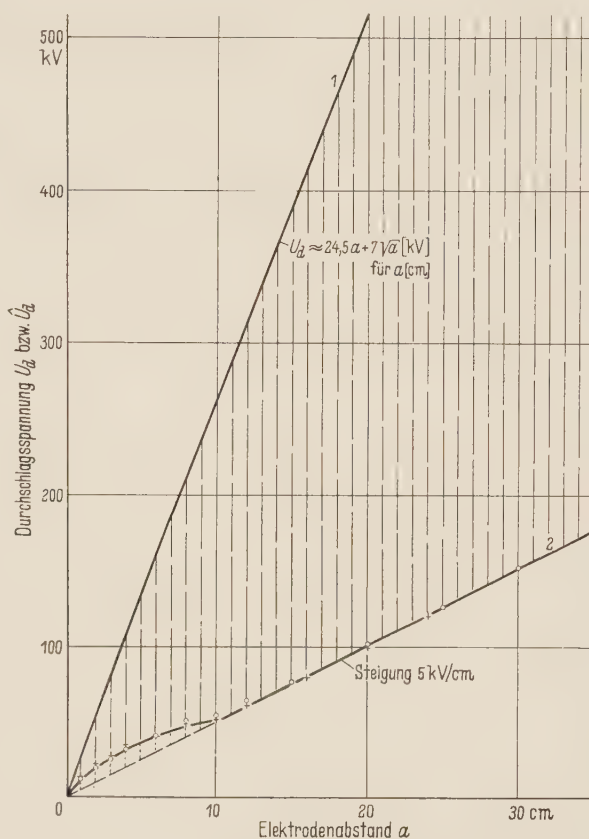


Bild 2. Grenzen der Durchschlagfestigkeit der Luft für Normalbedingungen (relative Luftdichte  $\delta = 1$ , Luftfeuchtigkeit  $f = 70-80\%$ ).

Kurve 1: Obere Grenze. Durchschlagspannung der Plattenfunkenstrecke für Gleich-, Wechsel- und nicht zu kurze Stoßspannungen. Mittelwertkurve aus vielen Messungen [3].

Kurve 2: Untere Grenze. Durchschlagspannung der Spitze-Plattenfunkenstrecke. Eingetragene Meßwerte bei einer Spitzenelektrode mit  $30^\circ$  Spitzenwinkel und 0,6 cm Schaftdurchmesser gewonnen.

○ Wechselspannungsdurchschläge

+ Gleichspannungsdurchschläge bei positiver Spitze.

<sup>3</sup> Verhalten bei Spannungstößen: R. STRIGEL [4].

<sup>4</sup> Im Gegensatz zum Durchschlag, bei dem die gesamte Luftstrecke zwischen den Elektroden von einer elektrischen Entladung mit fallender Strom-Spannungs-Kennlinie kurzgeschlossen ist, soll unter Durchbruch der Zustand verstanden werden, der durch das Zünden oder das Vorhandensein einer Vorentladung bewirkt wird, die noch keinen vollkommenen Isolationszusammenbruch bedingt.

Mit der Durchschlagsspannung der Plattenfunkenstrecke einerseits und der der Spitze-Platte-Funkenstrecke bei positiver Gleichspannung und bei Wechselspannung andererseits sind die Grenzen der Luftfestigkeit gegeben. Der in Bild 1 schraffierte Bereich zeigt daher, inwieweit sich die Durchschlagfestigkeit der Luft durch entsprechende Dimensionierung der Elektroden ändern läßt. Die Grenzspannungswerte stehen etwa im Verhältnis 1:5.

### 3. Die Entwicklung zum Stromfaden-Durchschlag

Der kanalartige, je nach Anodenkrümmung mehr oder weniger weit in den Feldraum hineinwachsende Strom- oder Leuchtfaden ist die erste deutlich wahrnehmbare positive Vorentladungserscheinung<sup>5</sup>. Die Entstehung dieser Entladungsart hängt davon ab, ob der Betrag und der Verlauf der elektrischen Feldstärke in Anodennähe die Entwicklung von Elektronenlawinen großer Trägerzahl zuläßt und ob Anfangselektronen für den Beginn der Stoßionisation im kritischen Gebiet vorhanden sind. Da diese Bedingung auch schon für die Bildung kleiner Impulsentladungen erfüllt sein muß, ist anzunehmen, daß sich erst durch Zusammenwirken vieler Lawinen Stromfäden entwickeln, wobei der Photostrahlung eine ausschlaggebende Rolle beim Aufbau zukommt. Die Abhängigkeit von dem zufälligen Zusammenwirken vieler Elektronenlawinen spiegelt sich bei konstanter Elektrodenspannung in der unterschiedlichen Länge der Einzelentladungen wieder.

Der einmal gezündete Stromfaden wächst so weit vor, wie es der Verlauf des elektrostatischen Grundfeldes zusammen mit dem Raumladungsgehalt des maßgebenden Feldgebietes erlaubt, da hiervon die Zufuhr der zum Vorwachsen notwendigen Elektronen abhängt. Die Stromfaden-Kanäle sterben ab, wenn die Elektronenzufuhr schwächer wird.

Stromfäden entwickeln sich im raumladungsfreien Feld gut, im raumladungsbehafteten Feld dagegen schlecht. Ist der Raumladungsgehalt vor der Anode groß, so wird die Kanalbildung völlig unterdrückt. Hierfür ist es belanglos, ob die Zahl der positiven oder die der negativen Ionen überwiegt. Eine vorwiegend positive Ladung schwächt das Feld zwischen ihr und der positiven Elektrode. Sie unterdrückt bei genügender Stärke jegliche Stoßionisation und bestimmt somit auch die Stromfadenpause, da ein erloschener Stromfaden im Gebiete seiner ursprünglichen Kanäle viele positive Ionen zurückläßt. Befindet sich in dem maßgebenden Gebiet stattdessen eine negative Ionenwolke, z. B. dadurch, daß sich einige der beim Entladungsaufbau photo-elektrisch erzeugten Elektronen im feldschwachen Gebiet an neutrale Teilchen angelagert haben und nach dem Absterben des Stromfadens in Anodennähe gelangen konnten, so wird das Feld vor der Anode aufgesteilt. Die Zündbedingung wird dadurch verbessert, während aber gleichzeitig die Ionisierungszone stark eingeengt wird. Die Folge davon ist, daß je nach Lage und Dichte der negativen Ionen entweder die Stromfäden frühzeitig absterben oder sich an Stelle der Stromfäden eine andere, in Kathodenrichtung eng begrenzte Entladungsart diffusen Charakters ausbildet. Negative Ionen vor der positiven Elektrode hemmen auf diese Weise die Kanalbildung und begünstigen die Entstehung einer Glimmentladung.

Da sich die Stromfäden in einem raumladungsfreien Feld besonders gut entwickeln, ist ihr räumlich-zeitlicher Aufbau bei sehr steilen Spannungsstößen gut zu verfolgen. Aus solchen Untersuchungen [4], [5], [6] hat sich ergeben, daß diese kathodengerichteten Kanäle wegen der einflußreichen Mitwirkung der Photostrahlung in außerordentlich kurzer Zeit aufgebaut werden (je nach den Feldverhältnissen liegt die Aufbauzeit zwischen  $10^{-8}$  und  $10^{-6}$  s) und aus dem gleichen Grunde sehr stark verzweigt sind. Aber auch bei statischer Spannungsbeanspruchung entstehen weitreichende, stromstarke, positive Kanäle, insbesondere dann, wenn vorher keine Ionisierungsprozesse stattgefunden haben, also das Feld noch raumladungsfrei ist. Das ist im nicht zu ungleichförmigen Feld im allgemeinen der Fall. Dort entwickelt sich beim Erreichen der Anfangsspannung ein stromstarker, bis zur Kathode vorwachsender Leuchtfaden, der eine durchgehende, gut leitende Verbindung zwischen den Elektroden

<sup>5</sup> Die Stromfäden und der Übergang in das Glimmen sind in den Arbeiten [1], [2] vom Verfasser ausführlich behandelt.



herstellt und dadurch den Durchschlag herbeiführt. Hier fallen somit Anfangs- und Durchschlagsspannung zusammen. Der Durchschlag erfolgt dann ohne getrennt wahrnehmbare Vorentladung.

Nimmt hingegen die Grundfeldstärke mit der Entfernung von der Anode steiler ab, so daß der Stromfaden nachdem er einen Teil des Feldraumes durchbrochen hat in feldschwaches Gebiet kommt, so stirbt er an Elektronenmangel, da sich die vorwiegend photo-elektrisch erzeugten Elektronen dort an neutrale Teilchen anlagern. Diese gehen dem Kanalaufbau verloren. Gleichzeitig verhindert die so entstandene negative Ionenladung durch Feldveränderung die Elektronenzufuhr aus entfernter gelegenen Gebieten. Bei Erhöhung der Elektroden-spannung nimmt die Reichweite der Kanäle zunächst zu, weil hierdurch die Feldstärke im gesamten Elektrodenzwischenraum angehoben wird. Jedoch wird mit jedem erloschenen Stromfaden der Raumladungsgehalt des Feldes größer, so daß die Stromfäden schließlich verkümmern und vom Glimmen abgelöst werden.

Für die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen Reichweite und Spannungsbedarf der Stromfäden interessiert die Elektrodenspannung, bei der in einer gegebenen Elektrodenanordnung ein Stromfaden gerade noch zum Durchschlag führt. Diese gibt den Spannungsbedarf der Entladung zur Überbrückung des Elektrodenabstandes bei den vorliegenden Feldverhältnissen an. Für den in Bild 1 dargestellten Kugelkondensator löst ein Stromfaden beim Radius  $r = 0,9$  cm der Innenkugel gerade noch den Durchschlag aus, bei kleineren Anodenradien dagegen nicht mehr, so daß bei diesem Radius der gesuchte Grenzfall vorliegt. Der Spannungsbedarf des Stromfadens beträgt hierbei  $U = 44$  kV und die dazugehörige Stromfadenlänge  $l = R - r = 10,05 - 0,9 = 9,15$  cm. Unter der Voraussetzung, daß der den Durchschlag zündende Stromfaden ein raumladungsfreies Feld vorfindet, beträgt die Feldstärke an der Anodenkugel zu Beginn des Durchbruches  $53,7$  kV/cm, in  $1$  cm Entfernung von der Anode noch  $12$  kV/cm und an der Oberfläche der Kathode nur noch  $0,4$  kV/cm. Die Annahme der Raumladungsfreiheit ist zumindest für die überschlägige Berechnung der Feldverteilung erlaubt, da zur Erzielung eines Stromfaden-Durchschlages ohnehin der vorher ermittelte Wert der Anfangsspannung in diesem Grenzfall schnell übergangen werden mußte, damit ein bis zur Kathode vorwachsender Leuchtfaden entstand. Dem durchschlagzündenden Stromfaden sind daher keine schwächeren Stromfäden vorausgegangen.

Es ist bezeichnend, daß bei der steilen Feldstärkeabnahme in Kathodenrichtung die Entladungskanäle überhaupt bis zur Hüllkugel vorstoßen. Das kann nur so erklärt werden, daß schon in Anodennähe, also noch im Gebiete hoher Feldstärkewerte, die Entladung zu einem Plasmaschlauch führt. Das ist vorstellbar, weil wegen der Kugelsymmetrie des maßgebenden Feldgebietes in einem breiten Raum hohe Feldstärken vorhanden sind, so daß zahlreiche Nebenäste entstehen können, die den Hauptkanälen pro Zeiteinheit sehr viele Elektronen zuführen. Da Plasmaschläuche eine fallende Strom-Spannungs-Charakteristik haben, wird das Potential des Kanalkopfes verhältnismäßig hoch sein, so daß die Entladung auch noch in einem mäßigen Grundfeld vorwachsen kann.

Zur Ermittlung weiterer Grenzwerte wurde der Radius der äußeren Kugel variiert und wiederum die Anfangs- und Durchschlagsspannung in Abhängigkeit vom Radius der Anodenkugel bestimmt. In Bild 3 ist das Ergebnis solcher Versuchsreihen graphisch dargestellt. Der Stromfaden-Durchschlag verschiebt sich für kleine Halbmesser der Hohlkugel wegen der geringeren Schlagweite zu kleinen Anodenradien  $r$  hin. An dem prinzipiellen Durchschlagverhalten ändert sich jedoch nichts. Aus diesem Diagramm wurden die Grenzfälle herausgezogen, für die erstmalig Stromfäden zum Durchschlag führen. Während bei  $R = 10,05$  cm die Feldstärke an der Oberfläche der Hüllkugel kurz vor dem Stromfaden-Durchschlag im Grenzfall ( $r = 0,9$  cm) nur  $0,4$  kV/cm beträgt, hat sie bei den kleineren Hüllkugeln, wo die Grenze bei kleineren Anodenradien liegt, höhere Werte (für  $R = 4,9$  cm:  $0,8$  kV/cm, für  $R = 2,45$  cm:  $1,5$  kV/cm und für  $R = 1,25$  cm:  $3,3$  kV/cm). Die Stromfaden-Entladung benötigt also zum Weiterwachsen mit zunehmender Anodenkrümmung immer höhere Grundfeldstärken.



Aus der Auswertung der Grenzfälle folgt, daß die Länge der Leuchtfäden stärker als proportional mit dem Anodenradius zunimmt (Kurve 1 in Bild 4), während ihr Spannungsbedarf dabei nur etwa linear ansteigt (Kurve 2 in Bild 4). Die mit der Feldvergleichmäßigung einhergehende Verbesserung der Ionisierungsbedingungen hat daher zur Folge, daß der spezifische Spannungsbedarf der Entladung (Gesamtspannungsabfall durch Stromfadenlänge) steil abfallend geringer wird (Kurve 3 in Bild 4). Die Ursache hierfür ist die fallende Strom-Spannungs-Charakteristik hochionisierter Kanäle, die bewirken, daß die Wachstumsvoraussetzungen von seiten der Entladung her günstiger werden. Die Weiterentwicklung wird schließlich durch den Gesamtspannungsabfall und die Abnahme der Feldstärke im elektrostatischen Grundfeld bzw. in dem durch Raumladungen veränderten Feld abgebremst.

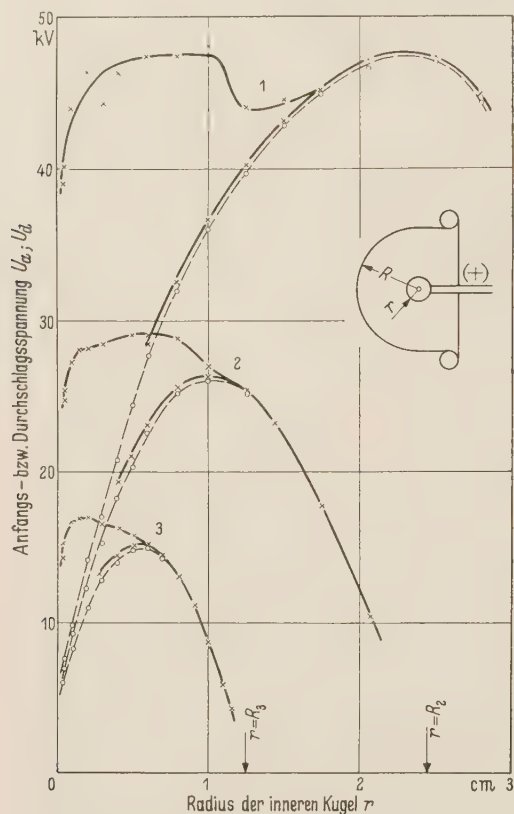


Bild 3. Anfangs- und Durchschlag-Gleichspannung für verschiedene Kugelkondensatoren als Funktion des Halbmessers  $r$  der Innenkugel. Innere Elektrode positiv. Anfangsspannung gestrichelt, Durchschlagspannung ausgezogen.

Fall 1:  $R = 4,9$  cm, Fall 2:  $R = 2,45$  cm, Fall 3:  $R = 1,25$  cm.

meingültig. So läßt sich sagen, daß die Stromfäden immer und nur dann zum Durchschlag führen, wenn die von ihnen für die Überbrückung des Elektrodenabstandes benötigte

Länge und Spannungsbedarf der Stromfäden stehen in einer Wechselbeziehung miteinander. Je höher die für den Entladungsaufbau zur Verfügung stehende Spannung ist, um so weiter kann ein Stromfaden vorwachsen (Kurve 1 in Bild 5), um so geringer ist aber zugleich der dabei benötigte Spannungszuwachs, weil der spezifische Spannungsbedarf mit der Stromfadenreichweite steil abfällt (Kurve 2 in Bild 5).

Diese Ergebnisse wurden im Kugelfeld gewonnen. Wenn sie deshalb auch nicht quantitativ auf andere Felder übertragen werden können, sind sie doch in ihren Grundzügen allge-

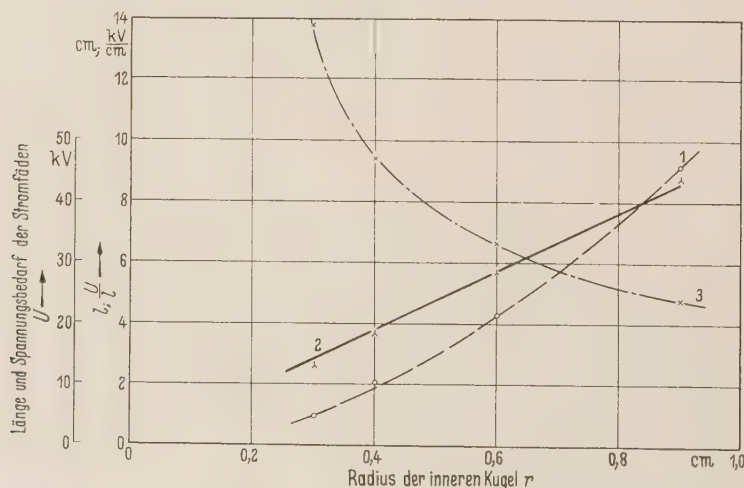


Bild 4. Länge und Spannungsbedarf der Stromfäden bei Gleichspannung im Kugelfeld in Abhängigkeit vom Radius  $r$  der schärfer gekrümmten Anode.

Kurve 1: Mittlere Stromfadenlänge  $l = R - r$ , Kurve 2: Zugehöriger mittlerer Spannungsbedarf  $U$  der Stromfäden, Kurve 3: Mittlerer spezifischer Spannungsbedarf  $U/l$  der Stromfäden.

Potentialdifferenz kleiner als die angelegte Spannung ist. Das ist im nur schwach inhomogenen Feld stets der Fall. Dort liegt die Anfangsspannung bereits so hoch, daß der Spannungsbedarf der Leuchtfäden, wenn sie erst einmal entstanden sind, nur ein Bruchteil davon ausmacht, da sich bei den in diesem Falle vorliegenden geringen Feldsteilheiten Hauptkanäle großer Stromdichte entwickeln können. Der erste Stromfaden dringt deshalb stürmisch vorwachsend bis zur Kathode vor. Der Durchschlag tritt hierdurch ohne getrennt wahrnehmbare Vorentladungen ein.

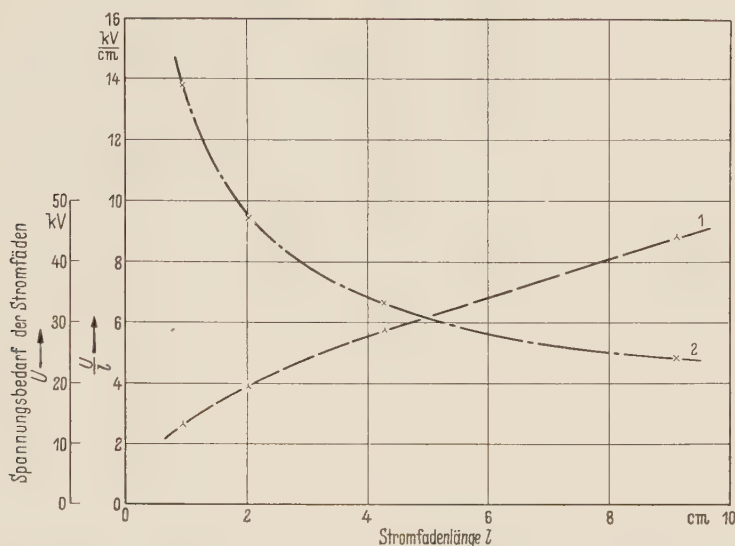


Bild 5 Zusammenhang zwischen Reichweite und Spannungsbedarf der Stromfäden im Kugelfeld bei Gleichspannung.  
Kurve 1: Gesamtspannungsbedarf  $U$ , Kurve 2: Spezifischer Spannungsbedarf  $U/l$ .

Bei größerer Anodenkrümmung fällt der Spannungsabfall in den Kanälen schon ins Gewicht. Die Stromfäden zünden hier den Lichtbogen gerade noch oder nur nach Spannungssteigerung. Bei noch schärfer gekrümmter Anode ist die Anfangsspannung stets niedriger als die Spannung, die der Leuchtfaden brauchen würde, um den ganzen Feldraum zu durchstoßen. Anfangs- und Durchschlagsspannung sind in diesem Fall immer voneinander verschieden. Der Unterschied nimmt bei konstanter Schlagweite mit der Krümmung der Anode zu. Außerdem besteht die Möglichkeit, daß die Glimm-Entladung die Stromfäden ablöst und damit der Unterschied noch größer wird.

#### 4. Die Entwicklung zum Glimm-Durchschlag

Im Gegensatz zu den kanalartigen, weit in den Feldraum vorwachsenden, unregelmäßig zündenden Stromfäden ist das Glimmen eine diffuse, sich nur auf die unmittelbare Anodenumgebung beschränkende Dauerentladung. Diese Entladungsart geht, wenn nur das Anodengebiet elektrisch hoch beansprucht ist, bei Spannungssteigerung aus der Stromfaden-Entladung hervor. Sie stellt daher die zweite Entwicklungsstufe der positiven Korona dar.

Für das Zünden des Glimmens ist notwendig, daß die Feldstärke von der Anode zur Kathode hin genügend steil abfällt und sich in Anodennähe eine ausreichend dichte, negative Ionenwolke befindet. Die Glimm-Entladung entsteht daher nur an verhältnismäßig stark gekrümmten Elektroden und zwar im Anschluß an elektrische Vorgänge, die zu einer negativen Raumladung vor der Anode geführt haben. Bei genügender Inhomogenität des Feldes erhält sich eine einmal gezündete Glimm-Entladung selbst, also auch dann, wenn die ursprüngliche negative Ionenquelle nicht mehr vorhanden ist. Die für die Zündung notwendigen ersten negativen Ionen können z. B. von einem Stromfaden, von Entladungen der Gegenelektrode oder bei Wechselfeldspannung von Entladungen der vorausgegangenen negativen Halbperiode herrühren. Bei Stoßspannung wird wegen der geringen Ionenbeweglichkeit das Glimmen

nicht gezündet, weil hierdurch in dem nur kurze Zeit bestehenden Stoßfeld keine wirksame Feldaufteilung in Anodennähe eintreten kann. Da sich die Glimm-Entladung nur bei Gleich- und Wechselspannung entwickelt und diese Entladungsart die Durchschlagfestigkeit einer Luftstrecke verbessert, ist es möglich, daß das Stoßverhältnis, also das Verhältnis von Durchschlagstoßspannung zur statischen Durchschlagspannung, Werte kleiner als 1 annimmt [9].

In Bild 6 ist die Entwicklung zum Glimm-Durchschlag schematisch dargestellt. Negative Ionen, die z. B. aus einer erloschenen Stromfaden-Entladung stammen können, haben sich den

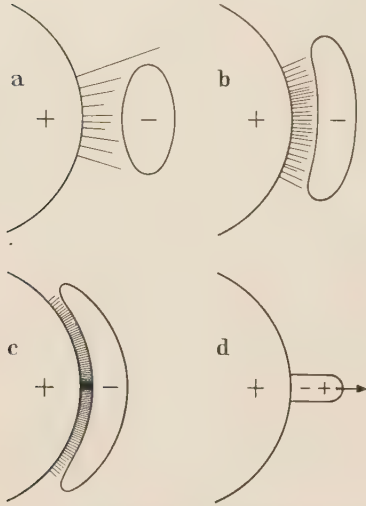


Bild 6. Entwicklungsstadien der Glimm-Entladung bei steigender Spannungshöhe.

- a Zwischen der negativen Ionenwolke und der Anode ist die Feldstärke höher als im elektrostatischen Grundfeld. In diesem Gebiet entstehen in Kathodenrichtung begrenzte Entladungen und im Randgebiet vereinzelt noch längere Stromfäden.
- b Das negative Raumladungsgebiet ist bei höherer Spannung größer und dichter. Die Glimm-Entladung hat sich stabilisiert.
- c Zwischen Anode und vorgelagerter negativer Raumladung herrschen so hohe Feldstärken, daß die negative Raumladung instabil wird.
- d Es entsteht ein Plasmaschlauch, der sich bei nicht zu großer Elektrodenentfernung bis zur Kathode verlängert.

Feldkräften folgend der Anode genähert, während die positiven Ionen der abgestorbenen Leuchtfäden bereits das Anodengebiet verlassen haben (Bild 6a). In der Zone zwischen Anode und negativer Raumladungswolke wird das Feld durch die negativen Ionen aufgestellt, während es gleichzeitig zur Kathode hin geschwächt wird. Die im Gebiete hoher Feldstärke in Anodennähe entstehenden Entladungen werden daher schon nach einer kürzeren Vorwachs-länge abgebremst, als wenn das Feld raumladungs-frei wäre. Nur in den Randzonen können noch längere Entladungen entstehen. Steigert man, wenn sich ein solcher Zustand ausgebildet hat, die Spannung, so wird die Potentialdifferenz zwischen der negativen Ladungswolke und der Anode größer, so daß die Stoßionisation in diesem Gebiete ergiebiger wird. Dadurch dehnt sich der von den negativen Ionen und zum geringeren Teil auch von Elektronen angereicherte Bereich allseitig aus und zwar so weit, wie für die Erlangung eines neuen Gleichgewichtszustandes notwendig ist (Bild 6b). Das erklärt die bei steigender Spannung beobachtbare Zunahme der Leuchtintensität und die seitliche Ausdehnung der Glimm-Entladung, die bei einer kugelförmigen Anode die Kugeloberfläche kappenartig bedeckt. Dieser Entwicklung wird ein Ende gesetzt, wenn die negative Raumladung instabil wird (Bild 6c). Daß es erst jetzt dazu kommt, bestätigt, daß die negative Raumladung vorher fast ausschließlich aus Ionen bestanden hat, was auch wegen der geringen Feldstärkewerte in ihrem Existenzbereich den

Erwartungen entspricht. Es ist anzunehmen, daß das plötzliche Umschlagen dadurch eintritt, daß bei hohen Feldstärken — wie sie nunmehr in dem aufgestellten Gebiet in Anodennähe herrschen — die Ionen ihre Ladungen freigeben, sich also in neutrale Moleküle und Elektronen aufspalten<sup>6</sup>.

Wenn die Elektronen auf die Anode auftreffen, setzen sie eine große Energie frei, nämlich die der Austrittsarbeit entsprechende Energie beim Eintritt in die Anode und ihre kinetische Energie, so daß angenommen werden muß, daß dadurch Thermo-Ionisation eintritt. Diese würde in Verbindung mit dem nunmehr starken Grundfeld zum Aufbau eines schnell vorwachsenden Trägerschlauches führen (Bild 6d).

Dieser Plasmaschlauch trägt nahezu das volle Anodenpotential in den Feldraum hinaus. Die äußeren Wachstumsbedingungen sind jetzt außerdem bedeutend günstiger als vormalig für die Stromfäden, da nunmehr die Elektroden-spannung und damit die Feldstärken im gesamten Feldraum höher sind. Die Plasmaspitze schießt schon deshalb weiter in Richtung

<sup>6</sup> L. B. LOEB [7] hat nachgewiesen, daß in hohen Feldern  $\left(\frac{E}{p} > 90 \frac{\text{V}}{\text{cm Torr}}\right)$  die  $\text{O}_2^+$ -Ionen eine so große Energie erlangen, daß diese zur Aufspaltung unter Bildung freier Elektronen führt. Dazu sind also bei 760 Torr Feldstärkewerte von wenigstens 68,4 kV/cm notwendig.



Kathode vor als früher ein Stromfaden. Bei nicht zu großer Schlagweite erfolgt die Verlängerung bis zur Kathode, wo hierdurch der Durchschlag gezündet wird.

### 5. Die Entwicklung zum Büschel-Durchschlag

Bei schwachem Grundfeld und ausreichender Elektrodenentfernung überbrückt der Plasmaschlauch, der beim Umschlagen der Glimm-Entladung entsteht, nicht den gesamten Feldraum, sondern endet vorher. Die Erscheinungsform ist das lange, positive Büschel, das wegen seines stielförmigen Ansatzes an der Anode auch als Stielbüschel bezeichnet wird. Die weitreichenden Büschel setzen die Durchschlagfestigkeit der Luft stark herab. Sie haben die spezifische Minstdurchschlagsspannung der Luft von etwa 5 kV/cm zur Folge. Bei nur geringer Luftfeuchte liegt sie bei 4,5 kV/cm, bei hoher steigt sie auf etwa 5,5 kV/cm. Es ist bezeichnend, daß auch der spezifische Spannungsbedarf der Stromfaden-Entladung einem Grenzwert zustrebt, der in dem gleichen Bereich liegt (siehe Kurve 2 in Bild 5)<sup>7</sup>. Das steht mit der Beobachtung im Einklang, daß stromstarke Leuchtfäden auch noch in einem Feldgebiet vorwachsen können, in dem die Grundfeldstärke so niedrig ist, daß sie praktisch keine Rolle mehr spielen kann. Stielbüschel können nur im sehr inhomogenen Feld entstehen. Der Feldverlauf in der Umgebung des Büschelkopfes ist dann praktisch überhaupt nicht mehr von den geometrischen Abmessungen der Anode beeinflußt. Vielmehr ist auch hier nur noch das Eigenfeld der Entladung für das Weiterwachsen maßgebend.

Die Feldstärke in der Umgebung des Büschels hängt von dem Spannungsabfall in der Entladung selbst ab. Das Kopfpotential des Büschels ist aber von seiner Länge weitgehend unabhängig, da die Entladung so weit vorwächst, wie ihr Eigenfeld es erlaubt. Es herrschen also am Kopf der Entladung unabhängig von deren Länge stets etwa die gleichen Ionisierungsbedingungen. Das Büschel wird daher bei stufenweiser Erhöhung der Elektrodenspannung immer um die gleiche Wegstrecke vorwachsen, wenn die Stufenhöhe konstant ist und sich die Verhältnisse im Entladungsschlauch nicht ändern. Daß die Temperaturen im Schlauch annähernd gleich bleiben, ist schon deswegen anzunehmen, weil die Anzahl der pro Zeiteinheit hindurchfließenden Elektronen auf Grund der Vorwachsbedingung nahezu konstant ist und die Elektronen im überwiegenden Maße am Entladungskopf gebildet werden, also von dort aus den ganzen hochionisierten Gasschlauch durchlaufen. So erscheint es verständlich, daß die spezifische Durchschlagsspannung beim Büschel-Durchschlag bei einer gegebenen Luftfeuchtigkeit konstant ist. Erst bei sehr großen Elektrodenabständen (einige Meter) läßt sich ein zunehmend flacher werdender Anstieg der Durchschlagsspannung von Spitzen- oder Stabfunkenstrecken feststellen [8].

Da als Folge der Photostrahlung in der Umgebung des Büschelkopfes auch negative Ionen gebildet werden, so ist es nicht verwunderlich, daß die spezifische Durchschlagsspannung bei hohem Feuchtegehalt der Luft größer ist als bei niedrigem. Wegen des elektronegativen Charakters der  $H_2O$ -Moleküle werden um so mehr Elektronen eingefangen, je mehr Wassermoleküle pro Volumeneinheit vorhanden sind. Die schwerbeweglichen Ionen hemmen das Weiterwachsen der Büschel naturgemäß in gleicher Weise wie bei der Stromfaden-Entladung.

### 6. Zusammenfassung

Die positiven Vorentladungen haben einen starken Einfluß auf die Durchschlagfestigkeit der Luft, und zwar auch dann, wenn gleichzeitig negative Vorentladungen vorhanden sind oder wie bei Wechselspannung sich negative mit positiven Vorentladungen abwechseln. Die für die Höhe der Durchschlagsspannung maßgebenden positiven Vorentladungen sind die Stromfäden, das Glimmen und die Büschel.

Bei nicht zu steilem Feldstärkeabfall vor der Anode leitet stets die Stromfaden-Entladung den Durchschlag ein und zwar je nach dem Grade der Feldsteilheit entweder ohne getrennt

<sup>7</sup> Vgl. auch den Verlauf der Kurven 3' und 4' (Stromfaden-Durchschlagsspannung einer Kugel-Plattenfunkenstrecke in Abhängigkeit von der Schlagweite) in Bild 2 der Arbeit [2], die in ihrem geradlinigen Teil ebenfalls eine Steigung von etwa 5 kV/cm haben.



wahrnehmbare Vorentladung bereits beim Wert der Anfangsspannung oder im inhomogeneren Feld erst nachdem die Spannung über den Wert der Anfangsspannung hinaus gesteigert wurde. Der kathodengerichtete Kanal, der im ersten Fall sofort bis zur Gegenelektrode vorwächst, unterliegt den gleichen Wachstumsbedingungen wie der vor Erreichen der Kathode absterbende Stromfaden, so daß in beiden Fällen von einem Stromfaden-Durchschlag gesprochen werden kann. Je größer der Bereich hoher Feldstärke ist, je weniger also die Feldstärke in Richtung Kathode abfällt, um so geringer ist der spezifische Spannungsbedarf der Stromfäden, der mit abnehmender Anodenkrümmung einem Wert zustrebt, der auch bei der Stielbüschel-Entladung festzustellen ist. Das steht mit der Beobachtung im Einklang, daß ein stromstarker Leuchtfaden ebenso wie das Stielbüschel auch noch in einem sehr mäßigen Grundfeld vorwachsen kann, so daß dann die Weiterentwicklung fast ausschließlich von dem Eigenfeld der Entladung bestimmt wird.

Wenn das elektro-statische Grundfeld von der Anode zur Kathode hin steil abfällt und negative Ionen in Anodennähe gelangt sind, entsteht vor der Anode nur eine schmale Glimmzone. Die negativen Ionen erhöhen in einem schmalen Bereich vor der Anode die Feldstärke und grenzen zugleich das Ionisierungsgebiet stark ein. Erst bei verhältnismäßig hoher Elektrodenspannung wird das Glimmen instabil und geht in einen zur Kathode vorschießenden Plasmakanal über. Dieser zündet, falls er die Gegenelektrode mit genügendem Kopfpotential erreichen kann, den Durchschlag. Wenn er dagegen vorher endet, entsteht das positive Büschel, das große Ähnlichkeit mit der Stromfaden-Entladung aufweist.

Die Büschel haben bei mittlerer Luftfeuchte einen spezifischen Spannungsbedarf von etwa 5 kV/cm. Die Durchschlagspannung nimmt in diesem Fall linear mit der Schlagweite zu, wobei die Steigung dann 5 kV/cm beträgt.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Dr.-Ing. R. STRIGEL meinen Dank für wertvolle Hinweise aussprechen und mich bei Herrn Dr.-Ing. H. WINKELNKEMPER für anregenden Gedankenaustausch und Ratschläge bei der Durchführung der Versuche bedanken.

#### Literatur

- [1] HERMSTEIN, W.: Untersuchungen über den Stromfaden-Durchschlag in Luft. Diss. TU Berlin 1959. — [2] HERMSTEIN, W.: Die Stromfaden-Entladung und ihr Übergang in das Glimmen. Arch. Elektrotechn. 45 (1960) S. 209. — [3] GÄNGER, B.: Der elektrische Durchschlag von Gasen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1953. — [4] STRIGEL, R.: Elektrische Stoßfestigkeit. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1955. — [5] RAETHER, H.: Die Entwicklung der Elektronenlawine in den Funkenkanal. Erg. exakt. Naturwiss. 22 (1949) S. 73. — [6] NASSER, E.: Entladungsaufbau im ungleichförmigen Feld bei positiver Spitze in atmosphärischer Luft. Diss. TU Berlin 1958. Veröffentlicht in: Arch. Elektrotechn. 44 (1959) S. 157. — [7] LOEB, L. B.: Phys. Rev. 48 (1935) S. 684. — [8] HAGENGUTH, J. H., A. F. ROHLFS u. W. J. DEGNAN: Trans. Am. Inst. El. Eng. III, 71 (1952) S. 455. — [9] HERMSTEIN, W.: Einfluß von Vorentladungen auf das Überschlagsverhalten grundsätzlicher Stützeranordnungen in Luft. ETZ-A. 81 (1960) S. 413.

Dr.-Ing. W. HERMSTEIN, Berlin-Charlottenburg 9, Reichssportfeldstr. 16



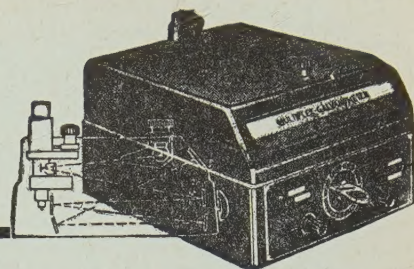
## Die Entstehung der exakten Wissenschaften

Von Dr. PAUL LORENZEN, o. Professor für Philosophie an der Universität Kiel

(Verständliche Wissenschaft, Geisteswissenschaftliche Abteilung, herausgegeben von Professor Dr. H. FRHR. VON CAMPENHAUSEN, Heidelberg. Zweiund-siebziger Band)

Mit 70 Abbildungen. V, 163 Seiten  
Kl.-8°. Ganzleinen DM 8,80

SPRINGER-VERLAG  
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



### Multiflex - Galvanometer

Empfindlich wie ein Spiegelgalvanometer — ab  $5 \cdot 10^{-11}$  A —. Einfach im Gebrauch wie ein Zeigerinstrument. Verschiedene Systeme von 20-6000 Ohm. Austauschbare Lichtzeigerskalen mit parallaxenfreier Ablesung. Skalenbeleuchtung umschaltbar für Netz- und Batterieanschluß. **Zusatzgeräte:** Photographische Registriereinrichtung. Photoelektrischer Nachlaufschreiber. Photoelektrische Schaltkontakte.

Verlangen Sie unsere neue Liste 18/AE



### DR. BRUNO LANGE

Spezialfabrik lichtelektr. Zellen  
und Apparate

BERLIN-ZEHLENDORF  
Hermannstraße 14-18

## Einführung in die theoretische Elektrotechnik

Von Dr.-Ing. E. h. KARL KÜPFMÜLLER,

o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Sechste, verbesserte und erweiterte Auflage.

Mit 527 Abbildungen. VII, 512 Seiten Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen DM 31,50

AUS DEN BESPRECHUNGEN DER 5. AUFLAGE

„... Das durch die präzise, klare und übersichtliche Darstellung ausgezeichnete Buch mit einer vortrefflichen Auswahl lehrhafter und praktisch wichtiger Probleme, die vielfach mit Zahlenbeispielen behandelt werden, war bereits in den früheren Auflagen nicht nur eines der meist benutzten Lehrbücher für den Unterricht der Elektrotechniker geworden, sondern es diente auch vielen Ingenieuren der Praxis trotz des bescheidenen Titels „Einführung“ als Nachschlagewerk. Die neue erweiterte Auflage ist daher sehr willkommen.“

VDI-Zeitschrift

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



# Technik der Magnetspeicher

Unter Mitarbeit von zahlreichen Fachleuten

herausgegeben von Professor Dr.-Ing. FRITZ WINCKEL, Berlin

Mit 325 Abbildungen. XVI, 614 Seiten Gr.-8°. 1960.

Ganzleinen DM 72,—

## INHALTSÜBERSICHT

Magnetische Grundbegriffe. Von Professor Dr.-Ing. M. KERSTEN, Aachen · Vorgang der Magnetton-Aufzeichnung und -Wiedergabe. Von Dipl.-Ing. O. SCHMIDBAUER, München · Das Preisach-Modell in der Theorie der Magnetton-Aufzeichnung. Von Dr.-Ing. G. SCHWANTKE, Konstanz · Sichtbarmachung magnetischer Schallaufzeichnungen. Von Dr. W. GUCKENBURG, Stamford/Connecticut (USA) · Die Technik der Magnettongeräte. Von Dipl.-Ing. E. SCHÜLLER, Wedel/Holstein · Verfahren und Geräte der bildsynchrone Tonaufzeichnung bei Film und Fernsehen. Von Dipl.-Ing. K.-E. GONDESEN, München · Verwendung der Magnetspeichertechnik für Fernsehaufzeichnung. Von Dr. H. WEHDE, Wedel/Holstein · Die magnetische Schallspeicherung im Studiobetrieb. Von Dr. F. ENKEL †, Köln · Die Magnetspeicher bei elektronischen Rechenmaschinen. Von Dr. H. BILLING, München · Der digitale Speicher als Baustein in Datenverarbeitungsanlagen. Von Priv.-Doz. Dr. R. PILOTY, Stuttgart · Meßtechnik der Magnetspeicher. Von Oberregierungsrat Dr. W. KALLENBACH, Braunschweig · Die Theorie des Magnetspeichers. Von Dr. F. KRONES, Leverkusen · Herstellung und elektro-akustische Eigenschaften von Magnetbandspeichern für die Schallaufzeichnung. Von Dr. F. KRONES, Leverkusen · Die Normung in der Magnetspeichertechnik. Geräte, Tonträger und Aufzeichnungen. Von Dr.-Ing. H. SCHIESSER, Hamburg · Umrechnungstabellen der Längen von Magnettonbändern und -filmen bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Von Dipl.-Ing. W. GRAU, Berlin · Sachverzeichnis.

## ZUR INFORMATION

Aus der Magnetton-Aufzeichnung hat sich in den letzten Jahren ein Speicherverfahren entwickelt, das von grundsätzlicher Bedeutung für viele Gebiete der Technik geworden ist und in der Praxis sich anderen physikalischen Prinzipien der Speicherung als überlegen erwiesen hat. Neben den Abwandlungen des Platten- und des Trommelspeichers hat sich der Magnetkernspeicher schnell eingeführt, der der elektronischen Rechenmaschine eine noch breitere Anwendbarkeit erschlossen hat. So ist die magnetische Speichertechnik ein neues selbständiges Wissensgebiet geworden, für das die theoretischen Grundlagen neu bearbeitet, die Prinzipien der Signalaufzeichnung und -abnahme sowie die konstruktive Geräteausbildung einheitlich übergeordnet dargestellt werden müssen. Schließlich ist die Entwicklung einer besonderen Meßtechnik wie auch die normenmäßige Durchdringung dieser vielseitigen Technik erforderlich geworden. Das vorliegende Werk bietet in diesem Sinne eine Grundlage für das noch junge Arbeitsgebiet „Magnetspeichertechnik“. Es gibt darüber hinaus einen Überblick über die wesentlichsten Anwendungsgebiete wie Magnetton- und Studioteknik, Fernsehen, Film, Rechentechnik und ihre vielfältigen maschinellen Verfahren. Dem Ingenieur wird in diesem Buch, das als eine Gemeinschaftsarbeit der führenden Fachleute auf den einschlägigen Teilgebieten entstanden ist, eine schnelle Orientierung über den Stand der Technik gegeben, um Lösungsentwürfe für neue Aufgaben zu finden.

**SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**